Leonard Smith

CHAOS
A Very Short Introduction

DẪN LUẬN VỀ

THUYẾT HỖN ĐỘN

OXFORD UNIVERSITY PRESS

VAN LANG CULTURE JSC

NHÀ XUẤT BẢN HỒNG ĐỨC

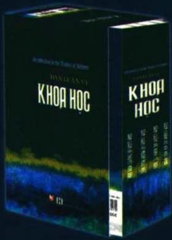
Leonard Smith tốt nghiệp ngành Toán vật lý và Khoa học máy tính tại Đại học Florida, tiến sĩ khoa học ngành Vật lý tại Đại học Columbia (Mỹ) năm 1987. Từ năm 1992, ông là chuyên viên nghiên cứu cao cấp (bộ môn toán học) tại Pembroke College, và là cộng tác viên nghiên cứu tại Viện Toán học, Đại học Oxford (Anh). Vào tháng 10 năm 2004, ông là giám đốc Trung tâm Phân tích Chuỗi thời gian (Centre for the Analysis of Time Series - CATS) tại Trường Kinh tế và Khoa học Chính trị London (London School of Economics and Political Science).

Mối quan tâm đến hiểu biết của công chúng về khoa học đã dẫn ông tới giải thưởng Selby Fellowship do Viện Hàn lâm Khoa học Australia trao tặng. Để ghi nhận sự đóng góp của ông về toán học và khí tượng học, Hội Khí tượng học Hoàng gia Anh đã tặng ông giải thưởng Fitzroy năm 2003.

Giáo sư Leonard Smith hiện là thành viên của Uỷ ban tư vấn Hội Thống kê Mỹ về chính sách biến đổi khí hậu (ACCCP) và là thành viên Uỷ ban Khoa học của Viện Smith tại Anh.

VĂN LANG
Tủ sách: Văn hóa xã hội

OXFORD
UNIVERSITY PRESS



Leonard Smith

CHAOS
A Very Short Introduction

DẪN LUẬN VỀ THUYẾT HỖN ĐỘN

Hỗn độn tồn tại trong những hệ thống ở khắp xung quanh chúng ta. Ngay cả hệ thống đơn giản nhất cũng có thể là hỗn độn, không cho phép chúng ta dự báo chính xác về hành vi của nó, và đôi lúc sinh ra những cấu trúc lạ lùng ở quy mô lớn. Trong cuốn sách này, Leonard Smith cho thấy chúng ta đều có một hiểu biết trực giác về những hệ thống hỗn độn. Ông sử dụng toán học và vật lý ở mức độ dễ hiểu để giải thích thuyết hỗn độn, và chỉ ra nhiều ví dụ trong triết học và văn học nhằm minh họa các vấn đề. Cuốn sách cung cấp một hiểu biết trọn vẹn về động lực hỗn độn, sử dụng những ví dụ từ toán học, vật lý, triết học và đời thực, kèm theo một lý giải tại sao hỗn độn lại quan trọng và nó khác ngẫu nhiên như thế nào. Những ứng dụng đời thực của thuyết hỗn độn bao gồm dự báo thời tiết, trò đánh cược và thị trường chứng khoán. ***Dẫn luận về thuyết hỗn độn*** *là cơ hội tuyệt vời để những người không chuyên về toán học có một hiểu biết sáng tỏ về khái niệm lý thú này.*

• VP CTY & NHÀ SÁCH : 40 - 42 NG. THỊ MINH KHAI, Q. 1 ĐT: 38.242.157
• SIÊU THỊ & NHÀ SÁCH : 01 QUANG TRUNG, Q. GÒ VẤP ĐT: 39.894.523
• NHÀ SÁCH VĂN LANG : 142-144 ĐINH TIÊN HOÀNG, Q. BT ĐT: 38.413.306
• TRỤ SỞ CHÍNH & XƯỞNG IN : 06 NGUYỄN TRUNG TRỰC, Q. BT ĐT: 35.500.331
Website: www.vanlang.vn * Email: vhvl@vanlang.vn

Facebook.com/Vanlang.vn

Dẫn luận về thuyết hỗn độn

8 935073 103575

Giá: 83.000đ

DẪN LUẬN VỀ
THUYẾT HỖN ĐỘN

NHÀ XUẤT BẢN HỒNG ĐỨC

Leonard Smith
Người dịch: Thái An

DẪN LUẬN VỀ THUYẾT HỖN ĐỘN

CHAOS
A Very Short Introduction

CHAOS - A VERY SHORT INTRODUCTION

Mục lục

Lời nói đầu

"Hỗn độn" (chaos) được giới thiệu trong những trang sách sau đây phản ánh những hiện tượng trong toán học và khoa học, những hệ thống (không có gian lận) tại đó sự khác biệt nhỏ ở trạng thái hiện thời của sự vật đưa đến hệ quả to lớn đối với trạng thái của nó trong tương lai. Dĩ nhiên, sẽ là gian lận nếu mọi sự chẳng qua xảy ra một cách ngẫu nhiên, hoặc nếu chúng tiếp tục bùng nổ mãi mãi. Cuốn sách này tìm hiểu những sự kiện hết sức phong phú, phát sinh từ ba ràng buộc đơn giản mà chúng ta gọi là *độ nhạy* [sensitivity], *tính tất định* [determinism], và *sự tái lặp* [recurrence]. Ba ràng buộc này cho phép có sự hỗn độn toán học: động thái tưởng như ngẫu nhiên, nhưng không ngẫu nhiên. Khi đưa vào một chút *không chắc chắn* [uncertainty], xem nó như một thành phần tích cực trong dự báo, hỗn độn đã thổi bùng trở lại những tranh cãi nhiều thế kỷ về bản chất của thế giới.

Đây là một tác phẩm dẫn luận độc lập, tự định nghĩa các thuật ngữ khi đề cập đến chúng.

Mục đích của tôi là trình bày về hỗn độn từ góc độ của câu hỏi cái gì, ở đâu và như thế nào, cố gắng bỏ qua mọi chủ đề "tại sao" vì nó đòi hỏi một nền tảng toán học cao. Thật may, mô tả về hỗn độn và dự báo có thể dựa vào một hiểu biết trực quan, hình học; sự khảo sát về hỗn độn sẽ đưa chúng ta vào thực địa của tính chất có thể dự báo mà không cần những phương trình, qua đó tiết lộ những câu hỏi mở của nghiên cứu khoa học thiết thực về thời tiết, khí hậu và những hiện tượng thế giới thực lý thú khác.

Sự quan tâm gần đây của đại chúng đến khoa học về hỗn độn đã diễn tiến khác với sự bùng nổ quan tâm đến khoa học từ một thế kỷ trước, khi lý thuyết tương đối hẹp khiến công chúng phấn khích trong nhiều thập kỷ. Tại sao phản ứng của công chúng với nghiên cứu khoa học về hỗn độn toán học lại khác? Có lẽ một điểm đặc thù là hầu hết chúng ta đều biết rằng những khác biệt nhỏ đôi khi có thể mang lại hiệu ứng khổng lồ. Khái niệm giờ đây được gọi là "hỗn độn" có nguồn gốc cả trong hư cấu lẫn thực tế khoa học. Thực ra, những ý tưởng này đã có nền tảng chắc chắn trong hư cấu trước khi chúng được chấp nhận như thực tế: có lẽ công chúng đã quen thuộc những ngụ ý của hỗn độn, trong khi các nhà khoa học vẫn còn phủ nhận? Những nhà khoa học và toán học lớn đã có đủ dũng cảm và sự sáng tỏ để thấy trước sự trỗi dậy của hỗn độn, nhưng cho đến gần đây, xu thế chủ đạo của khoa học vẫn đòi hỏi rằng một giải pháp tốt phải có biểu hiện đúng: những đối tượng fractal và những đường cong hỗn độn không chỉ bị xem là lệch lạc, mà còn là dấu hiệu của một câu hỏi được đặt ra không đúng cách. Một số nhà khoa học vẫn không thích các vấn đề có kết quả bị xem là không thể tái tạo kể cả trong lý thuyết. Những giải pháp mà hỗn độn đòi hỏi mới chỉ được chấp nhận rộng rãi gần đây trong giới khoa học, còn công chúng từ lâu đã thích thú với những câu như "tôi đã nói rồi", thường do những "chuyên gia" đưa ra. Điều này cũng cho thấy tại sao hỗn độn dù được bàn luận rộng rãi trong toán học và khoa học, lại bắt rễ trong những bộ môn ứng dụng như khí tượng học và thiên văn học. Các ngành khoa học ứng dụng bị thôi thúc bởi một ham muốn hiểu và dự báo thực tại, một ham muốn vượt quá sự chính xác của toán học chính thống cùng thời. Điều này yêu cầu có những cá nhân hiếm hoi, có khả năng kết nối sự phân chia giữa những mô hình của chúng ta về thế giới và bản thân thế giới như nó là mà không làm hai bên xoắn lại với nhau - những người có thể phân biệt toán học với thực tại để từ đó mở rộng toán học.

Như trong mọi tác phẩm *Dẫn luận*, hạn chế về không gian trình bày không cho phép đề cập toàn bộ những chương trình nghiên cứu; tôi sẽ trình bày lặp đi lặp lại một số chủ đề phù hợp với ngữ cảnh thay vì đưa ra một loạt những miêu tả hời hợt. Với những công trình tôi không nói tới, xin được có sự lượng thứ, và xin cám ơn Luciana O'Flaherty (biên tập viên), Wendy Parker, và Lyn Grove vì đã giúp đỡ tôi phân biệt giữa những gì thú vị nhất đối với tôi và những gì tôi có thể khiến độc giả cảm thấy thú vị.

Cách đọc Dẫn luận này

Tuy có một số nội dung toán học trong sách, những phương trình cũng không phức tạp hơn mức độ X = 2. Biệt ngữ chuyên ngành thì không dễ bỏ qua. Những từ in đậm và nghiêng là những thuật ngữ bạn cần am hiểu; đây là những thuật ngữ cốt lõi trong hỗn độn, và ở phần *Danh mục thuật ngữ* cuối sách bạn có thể tìm thấy định nghĩa ngắn gọn cho các thuật ngữ ấy. Từ in nghiêng được sử dụng vừa để nhấn mạnh vừa để báo hiệu một biệt ngữ cần cho các trang sau, nhưng ít lặp lại thường xuyên trong suốt cuốn sách.

Những thông tin khác về các thuật ngữ này có thể được tìm thấy trên mạng Internet, cũng như trong phần *Tài liệu tham khảo.*

1

Sự xuất hiện của hỗn độn

Nằm trong bùn, lấp lánh màu xanh,
vàng và đen,
là một con bướm, rất đẹp và bất động.
Nó rơi xuống sàn nhà, một thứ tinh tế, bé nhỏ
nhưng có thể làm rối tung những cân bằng,
đánh đổ một hàng domino nhỏ, rồi những
domino lớn,
rồi những domino khổng lồ, vượt năm tháng,
xuyên qua Thời gian.

Ray Bradbury (1952)

Ba dấu ấn của hỗn độn toán học

"Hiệu ứng cánh bướm" đã trở thành một khẩu hiệu phổ biến của hỗn độn. Những chi tiết nhỏ đôi khi mang lại tác động lớn, nhưng điều đó có thật sự đáng ngạc nhiên không? Có những khi một chi tiết nhỏ mà ai cũng biết lại là sự khác biệt giữa hai thế giới - một thế giới có một con bướm nào đó và một vũ trụ thay thế, hoàn toàn giống như cái thứ nhất ngoại trừ không có con bướm. Kết quả của khác biệt nhỏ này là hai thế giới nhanh chóng trở nên khác nhau một cách đột ngột. Lời giải thích toán học của khái niệm này được gọi là *sự phụ thuộc nhạy* [sensitive dependence]. Những hệ thống hỗn độn không chỉ biểu lộ sự phụ thuộc nhạy, chúng còn hai thuộc tính khác: *tất định* [deterministic], và *phi tuyến* [nonlinear]. Trong chương này, chúng ta sẽ xem những từ trên có nghĩa là gì, và làm thế nào những khái niệm này đi vào khoa học.

Hỗn độn có vai trò quan trọng, một phần vì nó giúp chúng ta đương đầu với những hệ thống bất ổn định bằng cách tăng năng lực mô tả, hiểu và có lẽ cả năng lực dự báo của chúng ta. Một trong những hoang tưởng về hỗn độn mà chúng ta sẽ vạch trần là: sự hỗn độn khiến dự báo trở thành công việc vô ích. Trong một câu chuyện khác về con bướm nhưng không kém phần phổ biến, có một thế giới nơi con bướm vỗ cánh và một thế giới khác nơi nó không vỗ cánh. Khác biệt nhỏ này có nghĩa là một cơn cuồng phong xuất hiện chỉ ở một trong hai thế giới ấy, kết nối hỗn độn với tính không chắc chắn và sự dự báo: chúng ta đang ở trong thế giới nào? Hỗn độn là tên gọi được gán cho cơ chế cho phép tính không chắc chắn tăng lên nhanh chóng trong những mô hình toán học của chúng ta. Hình ảnh về hỗn độn thổi phồng tính không chắc chắn và phá hỏng những dự báo sẽ là một chủ đề lặp đi lặp lại trong suốt Dẫn luận này.

Những lời thì thầm của hỗn độn

Những báo trước của hỗn độn có ở khắp nơi, ngay cả ở nhà trẻ. Từ thế kỷ 14 đã có lời cảnh báo rằng một vương quốc có thể mất vì nhu cầu có một cái đinh; phiên bản sau đây của câu hát ru quen thuộc đã được Benjamin Franklin đăng trong *Niên giám của Poor Richard** năm 1758:

> Thiếu một cái đinh nên mất miếng bịt
> móng ngựa,
> Thiếu một miếng bịt móng ngựa
> nên mất con ngựa,
> và thiếu con ngựa nên mất người cưỡi,
> bởi bị kẻ thù đuổi kịp và giết chết;
> Tất cả chỉ vì thiếu một cái đinh đóng móng
> ngựa

---

* Poor Richard (Richard khốn khổ) là biệt hiệu của Benjamin Franklin (1706 - 1790), một trong những người sáng lập nước Mỹ. Ông là một học giả, chính trị gia, nhà văn, nhà khoa học, nhà phát minh... và ở nhiều phương diện, là "một trong những người Mỹ đầu tiên".

Chúng ta không cố dùng hỗn độn để giải thích mầm mống của bất ổn; thay vì vậy, chúng ta mô tả sự tăng lên của tính không chắc chắn *sau khi* mầm mống ban đầu đã được gieo. Trong trường hợp này, điều đó có nghĩa là giải thích tại sao người cưỡi ngựa bị mất mạng do thiếu một cái đinh, không phải là giải thích tại sao cái đinh bị thiếu từ lúc đầu. Dĩ nhiên, thực tế có thể có hoặc không có cái đinh. Nhưng Poor Richard nói rằng nếu cái đinh không bị thiếu, vương quốc đã không bị mất. Chúng ta thường khảo sát những thuộc tính của các hệ thống hỗn độn bằng cách xem xét tác động của những hoàn cảnh hơi khác nhau một chút.

Nghiên cứu về hỗn độn thường có trong những khoa học ứng dụng như thiên văn học, khí tượng học, sinh học quần thể, kinh tế học. Những nhân vật chính trong sự phát triển của hỗn độn từ thời Isaac Newton đã được sản sinh ra từ những khoa học đưa ra quan sát chính xác và những dự báo định lượng về thế giới. Theo các định luật của Newton, tương lai của hệ mặt trời hoàn toàn được quyết định bởi trạng thái hiện thời của nó. Nhà khoa học thế kỷ 19 Pierre Laplace (1749 - 1827) nâng thuyết tất định lên một vị thế chủ chốt trong khoa học. Một thế giới có tính tất định nếu tình trạng hiện thời hoàn toàn xác định tương lai của nó. Năm 1820, Laplace đặt ra một thực thể ngày nay được gọi là "con quỷ của Laplace". Bằng cách này, về nguyên tắc, ông đã liên hệ tính tất định và năng lực dự báo với chính ý niệm về sự thành công trong khoa học.

> Chúng ta có thể xem trạng thái hiện thời của vũ trụ như kết quả của quá khứ và nguyên nhân cho tương lai của nó. Ở một khoảnh khắc nhất định, một trí tuệ sẽ biết mọi lực truyền động cho tự nhiên, mọi vị trí của những hạng mục tạo thành tự nhiên. Nếu trí tuệ đó cũng đủ lớn để đưa các dữ liệu này vào phân tích, nó sẽ đưa vận động của những thiên thể lớn nhất cho đến vận động của những nguyên tử nhỏ nhất vào một công thức duy nhất; với một trí tuệ như vậy, không có gì là không chắc chắn, tương lai cũng như quá khứ sẽ hiện diện rõ ràng.

Lưu ý rằng Laplace đã thấy trước và cho con quỷ của mình ba đặc tính: hiểu biết chính xác về các Quy luật của Tự nhiên ("mọi lực"), năng lực ghi nhận nhanh về trạng thái chính xác của vũ trụ ("mọi vị trí"), và những nguồn lực tính toán vô tận ("một trí tuệ đủ lớn để đưa những dữ liệu này vào phân tích"). Đối với con quỷ của Laplace, sự hỗn độn không đặt ra rào cản nào cho dự báo. Xuyên suốt *Dẫn luận* này, chúng ta sẽ xem xét ảnh hưởng của việc bỏ đi một hoặc một số những đặc tính trên.

Từ thời Newton đến khi thế kỷ 19 khép lại, hầu hết các nhà khoa học cũng là các nhà khí tượng học. Hỗn độn và khí tượng học được gắn kết chặt chẽ bởi sự quan tâm của nhà khí tượng học đến vai trò của tính không chắc chắn trong những dự báo thời tiết. Quan tâm của Benjamin Franklin đến khí tượng học đã mở rất rộng ra ngoài thí nghiệm nổi tiếng của ông về thả diều trong một cơn giông. Ông là người có công ghi nhận sự vận động chung của thời tiết từ tây sang đông, và kiểm chứng lý thuyết này bằng cách viết những lá thư từ Philadelphia tới các thành phố xa hơn về phía đông. Tuy những lá thư mất nhiều thời gian hơn so với thời tiết để tới đích, có thể cho rằng đây là những dự báo thời tiết đầu tiên. Bản thân Laplace đã phát hiện quy luật nói lên sự giảm áp suất khí quyển theo độ cao. Ông cũng có những đóng góp nền tảng vào lý thuyết sai số: khi chúng ta thực hiện một quan sát, sự đo lường không bao giờ đúng theo ý nghĩa toán học, nên luôn có một mức độ không chắc chắn nào đó về giá trị "Đúng". Các nhà khoa học thường nói bất kỳ tính không chắc chắn nào trong một quan sát cũng là do *nhiễu* [noise], nhưng lại không định nghĩa chính xác nhiễu là gì ngoài thứ che mờ năng lực quan sát của chúng ta trước những gì chúng ta đang cố gắng đo lường, dù đó là chiều dài của một cái bàn, số thỏ trong một khu vườn, hay nhiệt độ buổi trưa. Nhiễu sinh ra *tính không chắc chắn trong quan sát* [obervational uncertainty], và một khi có một mô hình cho nhiễu, sự hỗn độn giúp chúng ta hiểu bằng cách nào những điều không chắc chắn nhỏ có thể trở thành những điều không chắc chắn lớn. Nghiên cứu về hỗn độn đã đưa đến một số nhận thức về vai trò của nhiễu (hoặc các nhiễu) trong động lực của tính không chắc chắn ở những khoa học định lượng. Nhiễu đã trở nên thú vị hơn nhiều trong quá trình nghiên cứu về hỗn độn buộc chúng ta nhìn lại những gì chúng ta muốn nói khi dùng khái niệm một giá trị "Đúng".

Hai mươi năm kể từ khi cuốn sách của Laplace về xác suất xuất hiện, Edgar Allan Poe* đã đề cập đầu tiên về điều mà ngày nay chúng ta gọi là hỗn độn trong khí quyển. Ông nói chỉ cần vẫy tay cũng ảnh hưởng tới khí quyển ở khắp nơi quanh hành tinh. Poe sau đó lặp lại tư tưởng của Laplace, phát biểu rằng các nhà toán học của trái đất có thể tính toán diễn biến của "xung lực" vẫy tay này trong quá trình nó lan ra và làm thay đổi mãi mãi trạng thái của khí quyển. Dĩ nhiên, vẫy tay hay không là tùy chúng ta: ý chí tự do đưa ra một nguồn gốc mầm mống khác mà hỗn độn có thể nuôi dưỡng.

---

* Edgar Allan Poe (1809 - 1849), nhà văn Mỹ.

Năm 1831, sau khi công trình khoa học của Laplace được xuất bản và trước khi có hư cấu của Poe, thuyền trưởng Robert Fitzroy đã đưa chàng trai trẻ Charles Darwin lên chuyến hải trình khám phá của mình. Những quan sát trong chuyến hành trình này đã đưa Darwin đến lý thuyết chọn lọc tự nhiên. Tiến hóa và hỗn độn có nhiều điều chung hơn những gì người ta nghĩ. Thứ nhất, về ngôn ngữ, cả "tiến hóa" và "hỗn độn" đều được sử dụng đồng thời để nói tới những hiện tượng được giải thích và những lý thuyết được cho là thực hiện công việc giải thích. Điều này thường dẫn tới sự lẫn lộn giữa những mô tả và đối tượng được mô tả (giống như "lẫn lộn bản đồ với lãnh thổ"). Trong *Dẫn luận* này, chúng ta sẽ thấy việc lẫn lộn những mô hình toán học với thực tại mà chúng nhắm mô tả sẽ làm rối tung những bàn luận về cả hai. Và thứ hai, khi nhìn sâu hơn, có lẽ một số hệ sinh thái tiến hóa như thể chúng là những hệ thống hỗn độn, bởi rất có thể những khác biệt nhỏ trong môi trường đã mang lại những tác động khổng lồ. Và sự tiến hóa cũng đã góp phần vào những bàn luận về hỗn độn. Trích dẫn mở đầu chương này đến từ "Một âm thanh như tiếng sấm" của Ray Bradbury, trong đó những người du hành thời gian đi săn thú lớn tình cờ giết chết một con bướm, và khi trở lại với tương lai, họ thấy nó là một nơi khác. Những nhân vật trong câu chuyện đã tưởng tượng giết một con chuột, và cái chết của nó tạo ra tác động lan truyền qua những thế hệ chuột, cáo, sư tử bị mất đi:

> Mọi loại côn trùng, kền kền, hàng tỉ tỉ dạng sống bị quăng vào hỗn độn và hủy hoại... Dẫm lên một con chuột và bạn để lại dấu chân như một Đại Vực* tồn tại mãi với thời gian. Có thể nữ hoàng Elizabeth đã không bao giờ được sinh ra, có thể Washington đã không vượt qua được sông Delaware, có thể nước Mỹ đã không bao giờ ra đời. Nên hãy cẩn thận. Hãy đi đúng đường, đừng bao giờ bước chệch!

Khỏi phải nói, một người đã bước chệch đường, dẫm chết một con bướm nhỏ xinh đẹp màu xanh đen. Chỉ có thể đặt ra những thí nghiệm "sẽ thế nào nếu" trong phạm vi hư cấu của toán học hoặc văn học, bởi lẽ chúng ta chỉ tiếp cận được một mô hình hiện thực của thực tại.

Những nguồn gốc của thuật ngữ "hiệu ứng cánh bướm" được che đậy một cách bí ẩn. Câu chuyện năm 1952 của Bradbury có trước một loạt những công trình khoa học về hỗn độn được xuất bản đầu những năm 1960. Nhà khí tượng học Ed Lorenz (1917 - 2008) từng dẫn chứng rằng cánh

---

* Đại Vực (Grand Canyon) ở triền sông Colorado, bang Arizona, Mỹ.

của chim mòng biển là tác nhân của sự thay đổi, mặc dù chuyên đề nghiên cứu đó về danh nghĩa không phải của ông. Và một trong những hình ảnh thời đầu về một hệ thống hỗn độn do ông dùng máy tính tạo nên quả thật giống một con bướm. Nhưng bất kể "sự khác biệt nhỏ" có biểu hiện như thế nào - một cái đinh đóng móng ngựa bị thiếu, một con bướm, một con mòng biển, hay gần đây là một con muỗi "bị nổ" bởi Homer Simpson* - ý tưởng sự khác biệt nhỏ có thể gây tác động lớn cũng không mới. Hỗn độn tuy không nói gì về nguồn gốc của khác biệt nhỏ, nhưng lại đưa ra mô tả về việc phóng đại sự khác biệt ấy thành những quy mô phá tan cả vương quốc, bởi vậy nó có liên hệ mật thiết với dự báo và tính có thể dự báo.

Những dự báo thời tiết đầu tiên

Giống như mọi thuyền trưởng thời ấy, Fitzroy quan tâm sâu sắc đến thời tiết. Ông đã phát triển một phong vũ biểu dễ sử dụng trên tàu, và giá trị của một phong vũ biểu là vô cùng lớn đối với một thuyền trưởng không được tiếp cận hình ảnh vệ tinh và thông báo vô tuyến.

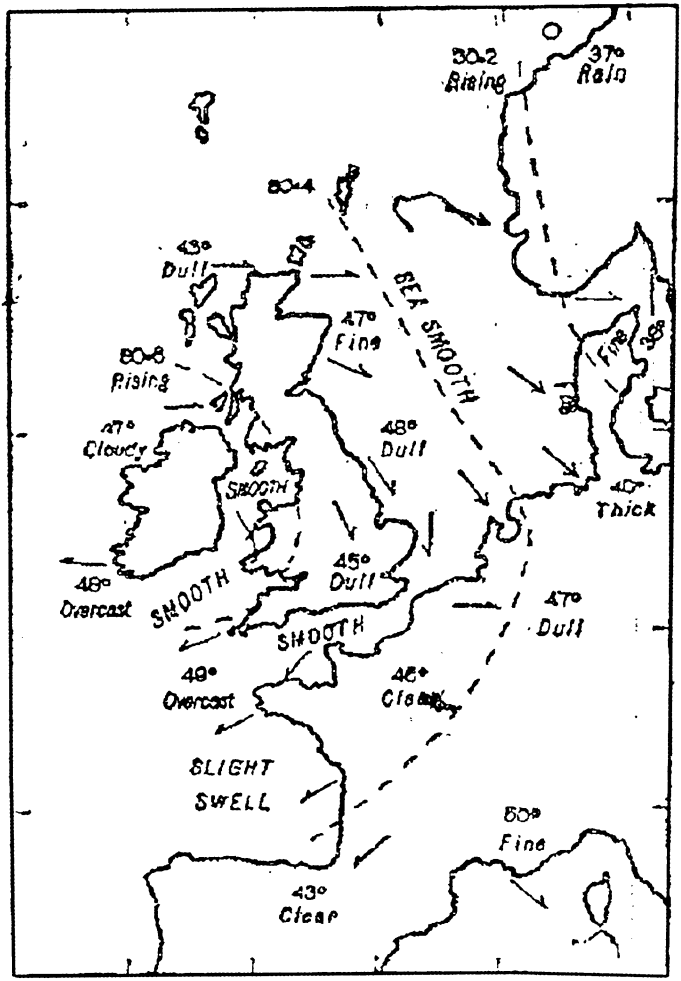
---

* Homer Jay Simpson là nhân vật hư cấu trong chương trình truyền hình "The Simpsons" ở Mỹ.

Những cơn bão lớn đi liền với áp suất khí quyển thấp. Bằng cách cung cấp một đo lường định lượng về áp suất để biết nó đang thay đổi nhanh thế nào, một phong vũ biểu có thể đưa thông tin cứu mạng về những gì có khả năng xảy ra. Sau này, Fitzroy trở thành nhân vật lãnh đạo đầu tiên của cơ quan về sau trở thành Cơ quan Khí tượng học Anh, và đã khai thác hình thức điện báo mới được triển khai để thu thập thông tin quan sát, đưa ra tổng kết về trạng thái thời tiết hiện thời ở khắp nước Anh. Lần đầu tiên, điện báo cho phép thông tin thời tiết đi nhanh hơn thời tiết. Làm việc với LeVerrier** của Pháp - người nổi tiếng vì sử dụng các định luật của Newton để phát hiện hai hành tinh mới - Fitzroy đã góp phần vào những nỗ lực quốc tế đầu tiên nhằm dự báo thời tiết theo thời gian thực. Những dự báo này đã bị phê phán gay gắt bởi em họ của Darwin, nhà thống kê Francis Galton (1822 - 1911), cũng là người công bố biểu đồ thời tiết đầu tiên trên tờ London Times năm 1875 (hình 1).

Nếu tính không chắc chắn do sai số quan sát tạo ra mầm mống mà hỗn độn nuôi dưỡng, hiểu biết về tính không chắc chắn có thể giúp chúng ta đương đầu tốt hơn với hỗn độn. Giống như

** Urbain LeVerrier (1811 - 1877), nhà toán học Pháp.



Hình 1. Biểu đồ thời tiết đầu tiên từng được xuất bản trên một tờ báo. Được thực hiện bởi Francis Galton, biểu đồ xuất hiện trên tờ London Times ngày 31 tháng 3 năm 1875.

Laplace, Galton quan tâm đến "lý thuyết sai số" ở ý nghĩa rộng nhất. Để minh họa thứ xuất hiện khắp nơi là "đường cong hình chuông", phản ánh sai số đo lường, Galton tạo ra "quincunx - cách sắp xếp nanh sấu"*, giờ đây được gọi là Bảng Galton. Phiên bản thường gặp nhất của bảng Galton được trình bày bên trái của hình 2. Bằng cách đổ các viên chì vào hình nanh sấu, Galton mô phỏng một hệ thống ngẫu nhiên, trong đó mỗi viên chì có cơ hội 50:50 để đi tới một trong hai phía của mỗi "cái đinh" mà nó bắt gặp, từ đó sinh ra một phân bố chì hình chuông. Lưu ý ở đây có nhiều điều hơn là cú đập cánh một-lần của con bướm: đường đi của hai viên chì gần nhau có thể cùng nhau hoặc phân kỳ tại mỗi cấp độ. Bảng Galton sẽ được đề cập thêm ở chương 9, nhưng trước đó, chúng ta sẽ nhiều lần sử dụng những con số ngẫu nhiên từ đường cong hình chuông như một mô hình cho nhiễu. Hình chuông có thể được thấy ở đáy của Bảng Galton phía trái của hình 2, và chúng ta sẽ thấy một phiên bản trơn hơn ở nửa trên hình 10.

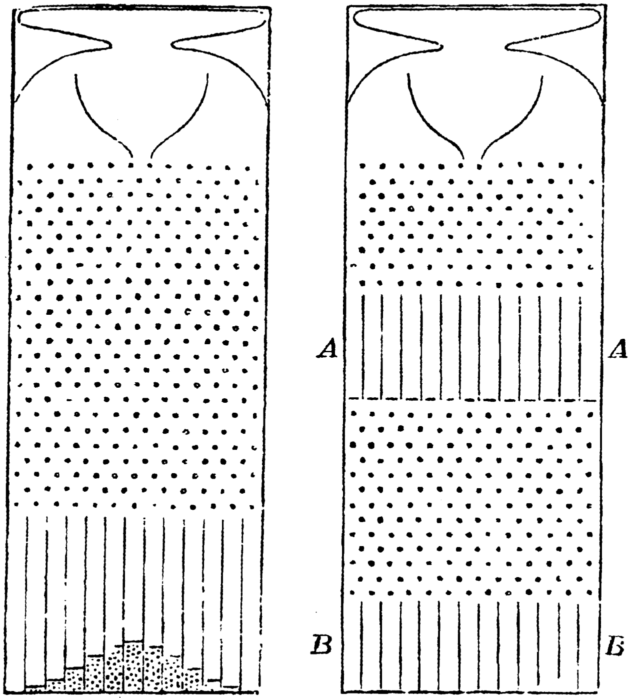
Nghiên cứu về hỗn độn mang lại hiểu biết mới cho lý do tại sao sau gần hai thế kỷ, dự báo thời tiết vẫn chưa đáng tin cậy. Có phải những chi tiết nhỏ không được chúng ta để ý trong thời

---

* Bốn ở góc, một ở giữa.

tiết ngày hôm nay đã có những tác động lên đến thời tiết ngày mai không? Hay là vì phương pháp của chúng ta tuy tốt hơn của Fitzroy nhưng vẫn không hoàn hảo? Phiên bản khí quyển của hiệu ứng cánh bướm do Poe đưa ra ngày trước đã kín kẽ với ý tưởng rằng nếu khoa học hoàn hảo, nó có thể dự báo mọi điều của thế giới vật chất. Nhưng có một thực tế là sự phụ thuộc nhạy sẽ làm những dự báo thời tiết chi tiết trở nên khó khăn, thậm chí có lẽ hạn chế phạm vi của vật lý, và trong một thời gian, điều này đã được thừa nhận cả trong khoa học lẫn hư cấu. Năm 1874, nhà vật lý học James Clerk Maxwell (1831 - 1879) đã nhận thấy một cảm giác "tương xứng" có khuynh hướng song hành với sự thành công trong một bộ môn khoa học:

> Điều này chỉ đúng nếu những biến đổi nhỏ trong hoàn cảnh ban đầu chỉ tạo ra những biến đổi nhỏ trong trạng thái cuối cùng của hệ thống. Ở rất nhiều hiện tượng tự nhiên, điều kiện này được thỏa mãn; nhưng có những trường hợp khác, trong đó một biến đổi nhỏ ban đầu có thể tạo ra một thay đổi rất lớn ở trạng thái cuối cùng của hệ thống, chẳng hạn như sự đổi chỗ các "ghi" khiến một xe lửa đâm vào một xe lửa khác thay vì giữ đúng đường của nó.



Hình 2. Những bản vẽ sơ lược của Galton năm 1889 về thứ ngày nay được gọi là "Bảng Galton"

Đây cũng là một ví dụ không điển hình về hỗn độn, bởi nó là độ nhạy "một-lần", nhưng nó vẫn có vai trò phân biệt độ nhạy và tính không chắc chắn: độ nhạy này chưa phải là nguy cơ chừng nào không có tính không chắc chắn về vị trí của các ghi, hay xe lửa nào ở đường ray nào. Hãy xem trường hợp rót một ly nước gần một đỉnh núi của dãy Rocky Mountains*. Tại một phía của đường phân chia lục địa này, nước tìm được đường đến với sông Colorado và Thái Bình Dương; tại phía kia nó sẽ tới sông Mississippi và cuối cùng là Đại Tây Dương. Việc di chuyển ly nước theo hướng này hay hướng kia minh họa độ nhạy: một thay đổi nhỏ trong vị trí của ly nước có nghĩa là một phân tử nước cụ thể sẽ có kết cục ở một đại dương khác. Tính không chắc chắn về vị trí của ly nước có thể hạn chế năng lực đưa ra dự báo phân tử nước nói trên rốt cục sẽ thuộc về đại dương nào, nhưng chỉ khi tính không chắc chắn ấy liên quan đến cả hai bên của đường phân chia lục địa. Tất nhiên, nếu thật sự cố thực hiện, chúng ta sẽ phải hỏi một đường toán học như vậy thực tế có phân chia hai lục địa không, hay phân tử nước có thể trải qua những phiêu lưu nào, khiến nó bị ngăn cản đến được đại dương. Thông thường, sự hỗn độn bao hàm nhiều hơn "một lần bẻ ghi" duy nhất. Thường thì giống hơn là một phân tử nước, liên tục bốc hơi và rơi xuống một vùng có những đường phân chia lục địa ở khắp nơi.

Phi tuyến [nonlinearity] được định nghĩa bởi những gì không phải nó (không tuyến tính)**.

---

* Dãy núi ở phía tây Bắc Mỹ.

** Ở đây, tuyến tính nghĩa là có thể nghiên cứu các phần rồi ráp lại để

Kiểu định nghĩa này dễ gây lẫn lộn: làm thế nào người ta xoay xở đưa ra một định nghĩa sinh vật học cho những con không phải voi? Ý tưởng căn bản mà chúng ta cần nhớ là, một hệ thống phi tuyến sẽ bộc lộ một phản ứng bất tương xứng: tác động của cọng rơm thứ hai chất lên lưng con lạc đà có thể lớn hơn nhiều (hoặc nhỏ hơn nhiều) so với tác động của cọng rơm thứ nhất. Các hệ thống tuyến tính luôn phản ứng theo tỉ lệ. Các hệ thống phi tuyến thì không nhất thiết, qua đó cho tính chất phi tuyến một vai trò quyết định trong nguồn gốc của sự phụ thuộc nhạy.

Cơn bão "Ngày của Burn"

Nhưng này chuột, ngươi không cô đơn,
Khi chứng minh rằng sự thấy trước có thể là vô ích:
Những kế hoạch được sắp đặt tốt nhất của chuột hay người
Cũng thường thất bại,
Chẳng để lại cho chúng ta điều gì ngoài buồn phiền và đau khổ,
Cho niềm vui đã hứa!
Nhưng so với ta, ngươi vẫn còn may mắn,
Hiện tại chỉ chạm đến ngươi:

có câu trả lời về tổng thể. Xem thêm *Danh mục thuật ngữ* cuối sách.

Than ôi! Ta ngoái nhìn về phía sau,
Những cảnh tượng thê lương!
Và về phía trước, dù chẳng thấy,
Ta suy đoán, và sợ hãi!

Robert Burns,
"Gửi một con chuột" (1785)*

Bài thơ của Burns tán dương con chuột vì năng lực chỉ sống trong hiện tại của nó, không biết đến đau khổ của những kỳ vọng không được đáp ứng hay sự khiếp đảm của tính không chắc chắn trong những gì chưa xảy đến. Và Burns đang viết ở thế kỷ 18, khi chuột và người vạch ra những kế hoạch của mình với rất ít trợ giúp từ máy móc tính toán. Sự thấy trước tuy rằng có thể nhọc công vô ích, các nhà khí tượng học mỗi ngày lại vật lộn để dự đoán thời tiết có khả năng xảy ra của ngày hôm sau. Đôi khi nó phát huy tác dụng. Năm 1990, vào ngày sinh nhật của Burn, một cơn bão lớn đã tràn qua Bắc Âu, bao gồm cả các đảo nhỏ ở duyên hải tây bắc của lục địa châu Âu, gây ra sự tổn thất tài sản và sinh mạng đáng kể. Trung tâm của cơn bão tràn qua thị trấn quê nhà của Burns ở Scotland, và sau này nó được gọi là cơn bão Ngày của Burns. Một biểu đồ thời tiết phản ánh cơn bão vào trưa ngày

---

* Robert Burn (1759 - 1796), nhà thơ Scottland.

25 tháng 1 được trình bày ở nửa trên hình 4. Chín mươi bảy người đã chết ở Bắc Âu, khoảng một nửa con số đó ở Anh, tạo thành số người chết cao nhất do bão trong 40 năm; khoảng 3 triệu cây bị đổ, tổng chi phí bảo hiểm lên đến 2 tỉ bảng. Nhưng cơn bão Ngày của Burn không phải là một trong những dự báo thất bại nổi tiếng của những kẻ thiếu chuyên nghiệp: nó đã được dự báo tốt bởi Cơ quan Khí tượng.

Ngược lại, cơn bão lớn năm 1987 lại nổi tiếng bởi buổi phát hình của đài truyền hình BBC vào đêm trước, trong đó các nhà khí tượng học nói mọi người đừng lo về những tin đồn từ Pháp rằng một cơn bão lốc sắp tràn vào nước Anh. Trên thực tế, cả hai cơn bão đều đạt sức gió trên 160 kilomet mỗi giờ, và cơn bão Ngày của Burn đã gây ra nhiều tổn thất về sinh mạng hơn; nhưng 20 năm sau sự kiện đó, cơn bão lớn của năm 1987 lại thường xuyên được bàn luận hơn, có lẽ chính vì cơn bão Ngày của Burns đã được dự báo tốt. Câu chuyện dẫn tới sự dự báo này minh họa thú vị một cách khác cho thấy sự hỗn độn trong những mô hình của chúng ta có thể tác động lên đời sống mà không cần nhờ đến những thế giới thay thế nhau, nơi có hoặc không có bướm.


THE TIMES

No 63,613

FRIDAY JANUARY 26 1990

30p

Ministers promise help after South is battered by 110mph gusts

Winds of devastation kill 38

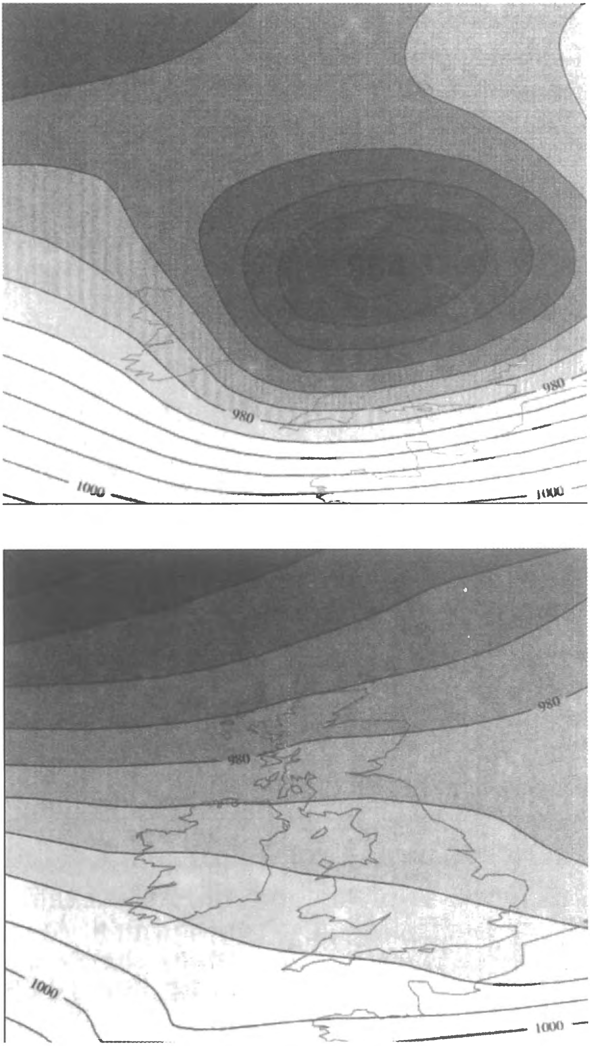
Motorways blocked, London halted

By David Cross and David Sapsted

Hình 3. Tiêu đề của tờ The Times vào ngày hôm sau cơn bão Ngày của Burns

Sáng sớm ngày 24 tháng 1 năm 1990, hai con tàu ở giữa Đại Tây Dương đã gửi những quan sát khí tượng học thường lệ từ những vị trí tình cờ ở hai phía của điểm sau này là trung tâm cơn bão Ngày của Burns. Những mô hình dự báo lập trên các quan sát này đưa ra một dự báo đúng về cơn bão. Mô hình được lập lại sau cơn bão, cho thấy nếu những quan sát này bị bỏ qua, mô hình sẽ dự báo một cơn bão yếu hơn và ở sai vị trí. Cơn bão Ngày của Burns tràn đến trong ngày, và nếu không thể đưa ra lời cảnh báo trước, tác động lên sự tổn thất sinh mạng sẽ là rất lớn, nên ở đây chúng ta có một ví dụ cho thấy một vài quan sát nếu không được thực hiện sẽ làm thay đổi dự báo, cũng tức là làm thay đổi tiến trình sự kiện của con người. Dĩ nhiên, một con tàu dự báo thời tiết ở đại dương thì khó mà ở không đúng chỗ như một cái đinh đóng móng ngựa. Nhưng câu chuyện không chỉ có thế, và để thấy sự liên quan của nó, chúng ta cần tìm hiểu xem các mô hình dự báo thời tiết "hoạt động" như thế nào.

Sự dự báo thời tiết trong ứng dụng tự nó đã là một hiện tượng đáng chú ý. Mỗi ngày, những quan sát được thực hiện ở các địa điểm xa xôi nhất có thể, sau đó được truyền và chia sẻ giữa các văn phòng khí tượng quốc gia ở khắp địa cầu. Nhiều quốc gia khác nhau sử dụng dữ liệu



Hình 4. Một biểu đồ thời tiết hiện đại, phản ánh cơn bão Ngày của Burns như được nhìn nhận thông qua một mô hình thời tiết (trên), và một dự báo trước hai ngày, nhắm đến cùng thời điểm, cho thấy một ngày khá êm ả (dưới)

này để lập các mô hình máy tính của họ. Đôi khi một quan sát gặp phải những sai lầm rõ rệt sơ đẳng, chẳng hạn nhập dữ liệu nhiệt độ vào ô tốc độ gió, hoặc lỗi đánh máy, hoặc trục trặc nhỏ khi truyền tin. Để giữ cho những sai lầm này không làm hỏng dự báo, những quan sát được nhập vào phải chịu sự kiểm soát chất lượng: quan sát nào không đúng với những gì mô hình kỳ vọng (so với dự báo gần nhất của nó) có thể bị loại bỏ, đặc biệt nếu không có những quan sát độc lập gần đó để củng cố chúng. Đó là một thủ tục tiến hành được thiết lập kỹ lưỡng. Đương nhiên, ở giữa Đại Tây Dương thì hiếm khi có quan sát "gần đó" thuộc bất kỳ loại nào, và những quan sát của tàu cho thấy sự hình thành của một cơn bão mà mô hình không dự báo, nên chương trình kiểm soát chất lượng tự động của máy tính đơn giản đã từ chối những quan sát này.

Thật may, máy tính đã bị bác bỏ. Một nhà dự báo trực ngày hôm đó đã nhận ra những quan sát này có giá trị lớn. Việc của ông là can thiệp khi máy tính thực hiện một điều gì đó rõ ràng ngốc nghếch, mà máy tính thì thường như vậy. Trong trường hợp này, ông đã dùng một mẹo để làm máy tính chấp nhận những quan sát. Có thực hiện hành động ấy hay không là một vấn đề hoàn toàn thuộc về óc phán đoán: khi đó không có cách gì để biết hành động nào sẽ đưa đến một dự báo tốt hơn. Máy tính đã bị "lừa", quan sát được sử dụng. Cơn bão được dự báo là sắp xảy ra, và nhiều sinh mạng đã được cứu.

Ở đây, có hai thông điệp cần lưu ý: thứ nhất, khi những mô hình của chúng ta là hỗn độn, những thay đổi nhỏ trong quan sát có thể ảnh hưởng lớn lên chất lượng của dự báo. Một kế toán viên tìm cách giảm chi phí và tính toán ích lợi điển hình của một quan sát cụ thể từ bất kỳ trạm dự báo thời tiết nào sẽ có xu hướng đánh giá rất thấp giá trị của một báo cáo tương lai từ một trong những trạm rơi vào đúng chỗ ở đúng thời điểm, và tương tự, đánh giá thấp giá trị của người dự báo can thiệp, một người trên thực tế thường không phải làm gì. Thứ hai, dự báo cho cơn bão Ngày của Burns minh họa một điều hơi khác với hiệu ứng cánh bướm. Các mô hình toán học cho phép chúng ta quan tâm đến những gì tương lai thực sẽ đem đến, nhưng không phải bằng cách xem xét những thế giới có thể có - và có khi chỉ có một - mà bằng cách đối chiếu những mô phỏng khác nhau cho mô hình, nên có thể tạo ra vô số mô phỏng tùy vào nguồn lực chúng ta có. Burns có lẽ cũng nhận thức rõ rằng khoa học cho chúng ta những cách mới để đoán và những điều mới để sợ. Hiệu ứng cánh bướm nêu bật sự tương phản giữa những thế giới khác nhau: một thế giới có cái đinh, một thế giới khác không có cái đinh ấy. Còn *hiệu ứng Burns* [Burns effect] đặt trọng tâm chắc chắn vào chúng ta và những nỗ lực của chúng ta nhằm đưa ra các quyết định hợp lý trong thế giới thực trên cơ sở chỉ có tập hợp những mô phỏng khác nhau dựa trên những mô hình không hoàn hảo. Việc không thể phân biệt giữa thực tại và mô hình, giữa quan sát và toán học, hay cũng có thể nói giữa một dữ kiện do kinh nghiệm và một hư cấu khoa học, chính là gốc rễ của nhiều lẫn lộn về hỗn độn cả ở công chúng lẫn các nhà khoa học. Chính nghiên cứu về tính chất phi tuyến và hỗn độn đã một lần nữa làm sáng tỏ tầm quan trọng của sự phân biệt này. Trong chương 10, chúng ta quay lại tìm hiểu sâu hơn cách thức mà những nhà dự báo thời tiết ngày nay sử dụng nhận thức của họ về hỗn độn khi đưa ra dự báo cho sự kiện.

Chúng ta đã nói sơ qua về ba thuộc tính có trong những hệ thống toán học hỗn độn: các hệ thống hỗn độn là phi tuyến, chúng có tính tất định, và chúng bất ổn ở chỗ biểu lộ sự nhạy cảm với điều kiện ban đầu. Trong những chương tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn, nhưng quan tâm thật sự của chúng ta không chỉ ở phương diện toán học của hỗn độn, mà còn ở những gì nó có thể nói cho chúng ta về thế giới thực.

Hỗn độn và thế giới thực: tính có thể dự đoán và một con quỷ của thế kỷ 21

> Trong khoa học không có sai lầm nào lớn hơn niềm tin rằng chỉ vì một phép tính toán học nào đó đã hoàn tất, một khía cạnh nào đó của Tự nhiên giờ đây trở nên chắc chắn.
>
> Alfred North Whitehead (1953)*

Hỗn độn có những ngụ ý gì cho đời sống thường ngày của chúng ta? Nó ảnh hưởng lên những phương pháp và phương tiện của dự báo thời tiết, tác động trực tiếp lên con người thông qua thời tiết và tác động gián tiếp thông qua hậu quả kinh tế của cả thời tiết lẫn những dự báo. Sự hỗn độn cũng đóng vai trò trong những câu hỏi về biến đổi khí hậu và năng lực của chúng ta để thấy trước độ lớn và tác động của sự ấm lên toàn cầu. Chúng ta còn dự báo nhiều thứ khác nữa, nhưng thời tiết và khí hậu có thể được sử dụng để lần lượt đại diện cho dự báo ngắn hạn và sự dựng mô hình dài hạn. Trong thiên văn học, "nhật thực sắp tới là khi nào?" giống như một câu hỏi về thời tiết, còn "hệ mặt trời có ổn định không?" giống như một câu hỏi về khí hậu. Trong tài chính, "thời điểm nào nên mua cổ phiếu của một chứng khoán

---

* Alfred North Whitehead (1861 - 1947), nhà toán học và triết học Anh.

nào đó" giống như một câu hỏi về thời tiết, còn câu hỏi giống như về khí hậu sẽ là "nên đầu tư vào thị trường chứng khoán hay bất động sản".

Hỗn độn còn ảnh hưởng lớn lên các bộ môn khoa học, buộc các nhà khoa học tái xem xét cẩn trọng những gì họ muốn nói với những thuật ngữ "sai số" và "không chắc chắn", và ý nghĩa của những từ này thay đổi ra sao khi được áp dụng vào thế giới thực và các mô hình của chúng ta. Như Whitehead đã chỉ ra, điều nguy hiểm là diễn giải những mô hình toán học như thể chúng bằng cách nào đó chi phối thế giới thực. Có thể nói rằng những tác động thú vị nhất của hỗn độn là không thật sự mới, nhưng những phát triển của toán học trong vòng 50 năm qua đã đưa nhiều câu hỏi cũ vào một ánh sáng mới. Ví dụ, tính không chắc chắn sẽ tác động ra sao lên diện mạo thế kỷ 21 của *con quỷ của Laplace* khi nó không tránh khỏi nhiễu quan sát?

Hãy giả sử một trí tuệ biết một cách chính xác tất cả những quy luật tự nhiên, và có những quan sát tốt tuy không hoàn hảo về một hệ hỗn độn tách biệt, qua một quãng thời gian dài tùy ý. Một năng lực như vậy - ngay cả nếu đủ lớn để đưa tất cả dữ liệu này vào phân tích chính xác bằng điện toán - cũng không thể quyết định trạng thái hiện thời của hệ thống, do vậy trong cái nhìn của nó, hiện tại cũng như tương lai sẽ vẫn không chắc chắn. Năng lực ấy tuy không thể dự đoán chính xác tương lai, nhưng tương lai sẽ không đưa lại cho nó nhiều ngạc nhiên thật sự vì nó có thể thấy điều gì có khả năng xảy ra hay không thể xảy ra, cũng như biết xác suất của bất kỳ sự kiện tương lai nào: nó có thể thấy tính chất có thể đoán trước của thế giới. Nếu mô hình của nó là hoàn hảo, tính không chắc chắn của hiện tại sẽ biến thành tính không chắc chắn lượng hóa được trong tương lai.

Trong *Những bài giảng ở Gifford* năm 1927, Sir Arthur Eddington* đi tới cốt lõi của vấn đề hỗn độn: một số thứ không đáng kể để dự đoán, đặc biệt nếu chúng không liên quan gì đến bản thân toán học, trong khi những thứ khác đôi lúc có vẻ đoán trước được:

> Một nhật thực toàn phần, thấy được ở Cornwall, được đoán trước cho ngày 11 tháng 8 năm 1999... Tôi có thể mạo hiểm dự đoán rằng 2 + 2 sẽ bằng 4 kể cả vào năm 1999...Dự báo cho thời tiết của thời điểm này năm sau... khó có khả năng trở nên thực tiễn... Chúng ta nên đòi hỏi sự hiểu biết vô cùng chi tiết về những điều kiện hiện tại, bởi lẽ một sai lệch cục bộ nhỏ có thể tạo nên một tác động ngày càng mở rộng. Chúng ta phải khảo sát trạng thái của

* Arthur Eddington (1882 - 1944), nhà thiên văn học Anh.

mặt trời... được báo trước về những phun trào núi lửa,..., một đợt đình công của công nhân mỏ than..., một que diêm đã châm bị quăng một cách vu vơ...

Những mô hình tốt nhất của chúng ta về hệ mặt trời là những mô hình hỗn độn, và những mô hình tốt nhất về thời tiết có vẻ là hỗn độn: nhưng tại sao Eddington năm 1928 tự tin rằng nhật thực năm 1999 sẽ xảy ra? Và cũng tự tin không kém rằng không dự báo thời tiết nào từ một năm trước sẽ chính xác? Trong chương 10, chúng ta sẽ xem làm thế nào các kỹ thuật dự báo thời tiết hiện đại nhằm đương đầu tốt hơn với hỗn độn đã giúp tôi thấy được nhật thực ấy.

Khi các mô hình đụng nhau: hỗn độn và cuộc tranh luận

Một trong những điểm khiến nghiên cứu về hỗn độn trở nên thú vị trong vòng 20 năm vừa qua là sự va chạm sinh ra khi những cách nhìn thế giới khác nhau đồng quy về cùng một tập hợp các quan sát. Hỗn độn đã dẫn tới một mức độ tranh luận nhất định. Những nghiên cứu dẫn tới sự ra đời của hỗn độn đã cách mạng hóa không chỉ cách các nhà dự báo thời tiết chuyên nghiệp đưa ra dự báo, mà thậm chí cả nội dung của một dự báo. Những ý tưởng mới này thường đi ngược với những phương pháp dựng mô hình thống kê truyền thống, và vẫn tạo ra cả tranh cãi gay gắt lẫn sự hiểu biết về cách tốt nhất để mô hình hóa thế giới thực. Cuộc tranh luận được chia thành những bàn cãi lẻ tẻ tùy bản chất của lĩnh vực và mức độ hiểu biết của chúng ta trong một hệ thống cụ thể mà một câu hỏi được đưa ra, dù đó là quần thể chuột đồng ở Scandinavia, một tính toán toán học để lượng hóa hỗn độn, số lượng các đốm trên bề mặt mặt trời, giá của dầu thô giao tháng tới, nhiệt độ cao nhất của ngày mai, hay ngày của nhật thực cuối cùng có thể có.

Bàn cãi lẻ tẻ cũng thú vị, nhưng hỗn độn cho chúng ta những hiểu biết sâu xa hơn ngay cả khi hai phía đang đấu tranh cho lợi thế truyền thống, chẳng hạn cho mô hình "tốt nhất". Ở đây, nghiên cứu về hỗn độn đã xác định lại cái gọi là vị thế ưu việt: ngày nay chúng ta buộc phải tái xem xét những định nghĩa mới về điều gì tạo thành mô hình tốt nhất, hay thậm chí một mô hình "tốt". Có thể nói chúng ta phải từ bỏ ý tưởng đến gần Sự thật, hoặc ít nhất định ra một cách hoàn toàn mới để đo lường khoảng cách từ chúng ta đến nó. Nghiên cứu về hỗn độn thúc đẩy chúng ta hình thành sự hữu dụng mà không cần hy vọng đạt được sự hoàn hảo, từ bỏ nhiều sự thật rõ ràng và chua chát về dự báo, chẳng hạn ý tưởng ngây ngô rằng một dự báo tốt là một đoán trước gần với mục tiêu. Ý tưởng này không có vẻ gì là ngây ngô nếu chúng ta chưa hiểu những ngụ ý của hỗn độn.

Cái nhìn duy thực của La Tour về khoa học trong thế giới thực

Để khép lại chương này, chúng ta sẽ minh họa làm thế nào hỗn độn có thể buộc chúng ta xem xét lại những gì tạo thành một mô hình tốt, điều chỉnh những niềm tin của chúng ta về những điều rốt ráo chịu trách nhiệm cho những thất bại trong dự báo. Tác động này của hỗn độn được cảm nhận cả bởi nhà khoa học lẫn nhà toán học, nhưng sự tái xem xét sẽ khác nhau tùy thuộc vào quan điểm cá nhân và hệ thống thực nghiệm trong nghiên cứu. Tình huống này được nhân cách hóa một cách thú vị trong hình 5, một bức họa Pháp theo phong cách nghệ thuật baroque của Georges de La Tour* về một trò chơi bài từ thế kỷ 17. Có thể nói La Tour là một người duy thực có khiếu hài hước. Ông thích trò bói bài và những trò chơi may rủi, đặc biệt những trò mà sự may rủi đóng một vai trò hơi thấp hơn so với những gì người chơi tin. Về lý thuyết, đó

---

* Georges de La Tour (1593 - 1652), hoạ sĩ Pháp trường phái Baroque.

có thể chính là vai trò của hỗn độn. Chúng ta sẽ diễn giải bức họa này để cho thấy một nhà toán học, một nhà vật lý học, một nhà thống kê và một triết gia tham gia vào một bài tập về kỹ năng, sự khéo léo, sự thấu tỏ và năng lực tính toán khác thường; đây có thể nói là một mô tả về việc làm khoa học, nhưng công việc ở đây là một trò poker. Ai là ai trong bức họa ấy là điều còn để ngỏ, và chúng ta sẽ trở lại những nhân cách hóa này của khoa học tự nhiên trong suốt cuốn sách. Hỗn độn đem lại những thấu tỏ khác nhau theo tầm nhìn của người quan sát, nhưng chúng ta có thể tin cậy vào một số quan sát dưới đây.

Người đàn ông trẻ ăn mặc chỉn chu ở bên

Hình 5. Trò lừa gạt với quân át rô, của Georges de La Tour, vẽ năm 1645

phải đang thực hiện những tính toán cẩn thận, chắc chắn là một dự báo xác suất theo kiểu nào đó; anh ta đang sở hữu số lượng đồng xu vàng đáng kể trên bàn. Nhà cái đóng một vai trò chủ chốt, không có cô thì không có trò chơi; cô cung cấp khuôn khổ ngôn ngữ để chúng ta giao tiếp, nhưng cô dường như đang giao tiếp không lời với người hầu gái. Vai trò của người hầu gái ít rõ ràng hơn; cô có lẽ chỉ liên quan hời hợt, nhưng việc tiếp rượu sẽ ảnh hưởng đến trò chơi, và bản thân cô có thể đóng vai trò như một yếu tố gây xao nhãng. Nhân vật gian xảo trong trang phục cẩu thả rõ ràng có liên quan đến thế giới thực, không đơn thuần là những biểu hiện trong một mô hình nào đó của nó; tay trái anh ta đang rút từ thắt lưng ra một trong nhiều con át rô và sắp đưa chúng vào bài. Vậy những "xác suất" do người đàn ông trẻ tính toán có giá trị gì khi trên thực tế, anh ta không chơi trò chơi mà mô hình toán học của anh ta mô tả? Và độ sâu thấu tỏ của gã gian xảo là đến đâu? Ánh mắt của anh ta hướng đến chúng ta, ngụ ý rằng anh ta biết chúng ta có thể thấy những hành động của anh ta, thậm chí có lẽ anh ta nhận ra mình đang ở trong một bức họa?

Ở đây, câu chuyện về hỗn độn là quan trọng vì nó cho phép chúng ta thấy thế giới từ tầm nhìn của mỗi người trong những người chơi. Có phải chúng ta chỉ đang phát triển ngôn ngữ toán học để trò chơi được tiến hành? Có phải chúng ta đang mạo hiểm rơi vào thiệt hại kinh tế bằng cách diễn giải quá mức một mô hình có tiềm năng hữu ích nào đó trong khi quên mất thực tế rằng như mọi mô hình khác, nó cũng không hoàn hảo? Có phải chúng ta chỉ đang quan sát bức tranh lớn, không trực tiếp tham gia vào trò chơi, nhưng đôi lúc gây ra một sự xao nhãng thú vị? Hay chúng ta đang thao túng những thứ mình có thể thay đổi, thừa nhận những rủi ro về sự bất toàn của mô hình, thậm chí về những hạn chế của chính chúng ta do việc ở trong hệ thống? Để trả lời những câu hỏi này, trước hết chúng ta phải khảo sát nhiều biệt ngữ khoa học nhằm thấy được làm thế nào hỗn độn xuất hiện từ nhiễu của thống kê tuyến tính truyền thống nhằm cạnh tranh những vai trò cả trong việc hiểu lẫn dự báo những hệ thống phức tạp của thế giới thực. Trước khi động lực phi tuyến của sự hỗn độn được thừa nhận rộng rãi trong giới khoa học, những câu hỏi này chủ yếu nằm trong lĩnh vực của các triết gia; ngày nay, thông qua những mô hình toán học, chúng đã vươn ra tới các nhà khoa học vật lý và những nhà dự báo hành nghề, làm thay đổi khoa học thống kê phục vụ cho việc ra quyết định, thậm chí tác động đến những người làm chính sách.

2

Tăng theo số mũ, phi tuyến, lẽ thường

Một trong những điều hoang đường phổ biến nhất về các hệ thống hỗn độn là chúng không thể được dự báo. Để phơi bày sai lầm này, chúng ta phải hiểu tính không chắc chắn trong một dự báo tăng lên như thế nào khi dự báo ngày càng xa vào tương lai. Trong chương này, chúng ta khảo sát nguồn gốc và ý nghĩa của *sự tăng theo số mũ* [exponential growth], nghĩa là xét trung bình, tính không chắc chắn nhỏ sẽ tăng nhanh theo cấp số mũ trong một hệ thống hỗn độn. Đúng là hiện tượng này ám chỉ rằng tính không chắc chắn tăng "nhanh hơn" mức thường thấy của chúng ta trong những quan điểm truyền thống về mức tăng của sai số và tính không chắc chắn khi dự báo xa hơn vào tương lai. Tuy vậy, đôi lúc sự hỗn độn có thể dễ dự báo.

Cờ, thóc và những con thỏ của Leonardo: tăng theo số mũ

Một câu chuyện thường được kể về nguồn gốc của môn cờ minh họa thú vị tốc độ của sự tăng theo số mũ. Câu chuyện kể rằng một vị vua của Ba Tư cổ đã hài lòng với trò chơi khi nó lần đầu được bày cho ông đến mức ông muốn thưởng cho người sáng tạo ra nó, Sissa Ben Dahir. Một bàn cờ có 64 ô, được sắp xếp theo mô hình 8 x 8. Về phần thưởng, Ben Dahir đề nghị một số lượng thóc tưởng như khá khiêm tốn, được quyết định bằng cách sử dụng bàn cờ: một hạt thóc được đặt vào ô thứ nhất, hai hạt thóc vào ô thứ hai, bốn vào ô thứ ba, tám vào ô thứ tư, cứ vậy nhân đôi số lượng ở mỗi ô vuông cho đến khi tới ô 64. Một nhà toán học sẽ gọi bất kỳ quy tắc tạo ra con số nào từ một con số khác là một *ánh xạ* [map] toán học, nên chúng ta sẽ gọi quy tắc đơn giản này ("nhân đôi giá trị hiện thời để tạo ra giá trị tiếp theo") là *Ánh xạ thóc*.

Trước khi tính ra Ben Dahir đòi bao nhiêu thóc, chúng ta hãy xét trường hợp tăng tuyến tính, nghĩa là có một hạt thóc ở ô thứ nhất, hai hạt ở ô thứ hai, ba hạt ở ô thứ ba, cứ vậy cho đến khi cần 64 hạt cho ô cuối cùng. Trong trường hợp này, tổng số là 64 + 63 + 62 + ... + 3 + 2 + 1, tương đương khoảng hơn 2.000 hạt. Để so sánh, một bao thóc 1 kg chứa khoảng vài chục ngàn hạt.

Ánh xạ thóc yêu cầu một hạt cho ô thứ nhất, hai hạt cho ô thứ hai, bốn hạt cho ô thứ ba, rồi 8, 16, 32, 64 và 128 hạt cho những ô còn lại của hàng thứ nhất. Ở ộ thứ ba của hàng thứ hai, chúng ta đã vượt qua 1.000 hạt, và trước khi kết thúc hàng thứ hai, đã có một ô làm cạn bao thóc của chúng ta. Chỉ riêng ô tiếp theo cũng cần nguyên một bao thóc khác, ô tiếp theo hai bao, và cứ thế. Một ô ở hàng thứ ba sẽ cần số lượng thóc bằng với một ngôi nhà nhỏ, và từ khá sớm trước khi kết thúc hàng thứ năm, chúng ta sẽ có đủ thóc để chất đầy nhà hát Royal Albert*. Cuối cùng, riêng ô thứ 64 sẽ đòi hỏi hàng tỉ tỉ hạt, hay nói chính xác là 263 (=9.223.372.036.854.775.808), và tổng số hạt là 18.446.744.073.709.551.615 (mười tám tỉ tỉ...). Đó là một số lượng thóc không hề nhỏ! Nó giống như sản lượng thóc của cả thế giới sản xuất ra trong hai thiên niên kỷ. Sự tăng theo số mũ nhanh chóng vượt ra ngoài mọi tỉ lệ.

Bằng cách so sánh lượng hạt ở một ô nhất định trong trường hợp tăng tuyến tính với lượng hạt ở cùng ô trong trường hợp tăng theo số mũ, chúng ta nhanh chóng thấy rằng sự tăng theo số mũ nhanh hơn nhiều so với sự tăng tuyến tính: ở

* Royal Albert Hall, Nhà hát lớn London, Anh, có sức chứa 5.272 chỗ ngồi.

ô thứ tư của trường hợp tăng theo số mũ, chúng ta đã có gấp đôi số hạt (8 hạt) so với trường hợp tăng tuyến tính (4 hạt), và đến ô thứ tám, kết thúc hàng thứ nhất, trường hợp tăng theo số mũ đã có số hạt nhiều hơn 16 lần! Chẳng bao lâu sau, chúng ta đã có những con số vô cùng lớn.

Dĩ nhiên, chúng ta đã giấu đi giá trị của một số *tham số* [parameter] trong ví dụ trên: có thể làm sự tăng tuyến tính nhanh hơn bằng cách thêm không phải một hạt sau mỗi ô, mà giả sử là 1.000 hạt. Biến số này, tức số lượng hạt tăng thêm, định nghĩa hằng số tỉ lệ giữa số của ô và số hạt ở ô đó, và cho chúng ta độ dốc của đường biểu thị mối quan hệ tuyến tính giữa chúng. Trong trường hợp tăng theo số mũ cũng có một biến số: ở mỗi bước, chúng ta tăng số lượng hạt theo hệ số bằng 2, nhưng hệ số có thể là 3, hoặc một hệ số bằng 1½.

Một trong những điều thú vị về sự tăng theo số mũ là, bất kể giá trị của những biến số này là gì, sẽ có một lúc sự tăng theo số mũ vượt qua bất kỳ sự tăng tuyến tính nào, sau đó nhanh chóng biến sự tăng tuyến tính thành một thứ nhỏ xíu dù sự tăng tuyến tính nhanh đến đâu. Mối quan tâm rốt ráo của chúng ta không phải là những hạt thóc trên một bàn cờ, mà là động lực của tính không chắc chắn theo thời gian. Không chỉ là sự tăng của tập hợp, chúng ta còn quan tâm đến sự tăng của tính không chắc chắn trong một dự báo về quy mô tương lai của tập hợp ấy. Trong ngữ cảnh dự báo, sẽ có lúc một mức độ không chắc chắn rất nhỏ tăng theo số mũ vượt qua một mức độ không chắc chắn rất lớn tăng tuyến tính hôm nay. Điều tương tự cũng xảy ra khi so sánh sự tăng theo số mũ với sự tăng tỉ lệ với thời gian bình phương, với thời gian thập phương, hay với thời gian lũy thừa bất kỳ (ký hiệu: sự tăng ổn định theo số mũ cuối cùng sẽ vượt qua sự tăng tỉ lệ với t2, t3 hoặc tn, với bất kỳ giá trị nào của n). Chính vì lý do này bên cạnh những lý do khác, nên sự tăng theo số mũ đặc biệt được chú ý trong toán học, được dựa vào để cung cấp tiêu chuẩn định nghĩa hỗn độn. Nó cũng góp phần vào ấn tượng sai lầm căn bản nhưng phổ biến rằng các hệ thống hỗn độn không thể được dự báo. Bàn cờ của Ben Dahir nói lên rằng có một ý nghĩa sâu xa trong hiện tượng sự tăng theo số mũ nhanh hơn sự tăng tuyến tính. Để hiểu điều này trong ngữ cảnh dự báo, chúng ta sẽ đi tiếp vài trăm năm về thời gian, vài trăm dặm về phía tây bắc, từ Ba Tư tới Italia.

Đầu thế kỷ 13, Leonardo of Pisa* đặt ra một

---

* "Leonardo xứ Pisa", Leonardo Bonacci (~1170-1250), nhà toán học người Ý, được xem là "nhà toán học phương Tây tài năng nhất thời Trung cổ".

câu hỏi về động lực học quần thể: giả sử một cặp thỏ mới sinh ở một khu vườn rộng, tươi tốt và có tường bao quanh, chúng ta sẽ có bao nhiêu cặp thỏ trong một năm nếu quy luật của chúng là mỗi cặp trưởng thành sẽ đẻ và tạo ra một cặp mới mỗi tháng, và thỏ mới sinh trưởng thành trong tháng thứ hai? Trong tháng thứ nhất, chúng ta chỉ có một cặp mới sinh. Trong tháng thứ hai, cặp này trưởng thành, đẻ và tạo ra một cặp mới trong tháng thứ ba. Nên trong tháng thứ ba, trong ta có một cặp trưởng thành và một cặp mới sinh. Trong tháng thứ tư, chúng ta lại có một cặp mới sinh từ cặp thỏ ban đầu, và giờ đây là hai cặp trưởng thành, tổng cộng có ba cặp. Trong tháng thứ năm, hai cặp mới được sinh ra (mỗi cặp từ một cặp trưởng thành), và chúng ta có ba cặp trưởng thành, tổng số năm cặp. Và cứ thế tiếp tục.

Vậy "động lực học quần thể" này giống như cái gì? Tháng thứ nhất, chúng ta có một cặp chưa trưởng thành, tháng thứ hai chúng ta có một cặp trưởng thành, tháng thứ ba chúng ta có một cặp trưởng thành và một cặp chưa trưởng thành, tháng thứ tư chúng ta có hai cặp trưởng thành và một cặp chưa trưởng thành, tháng thứ năm chúng ta có ba cặp trưởng thành và hai cặp chưa trưởng thành.

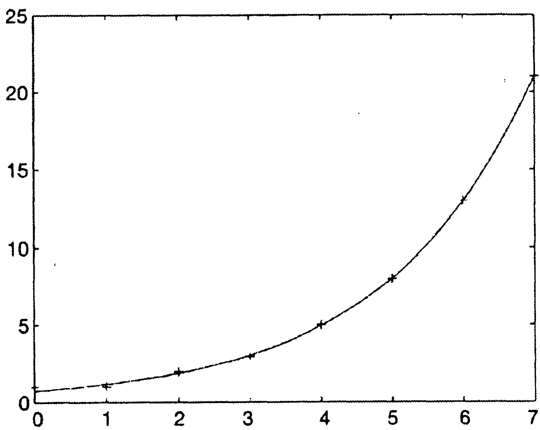
Nếu cộng dồn tất cả các cặp mỗi tháng, các con số sẽ là 1, 1, 2, 3, 4, 8, 13, 21... Leonardo nhận thấy số tiếp theo trong chuỗi luôn bằng tổng hai số trước đó (1+1=2, 2+1=3, 3+2=5,...) và điều này hợp lý vì con số liền trước là số chúng ta có tháng trước (trong mô hình, mọi con thỏ đều sống bất kể chúng lên đến bao nhiêu), và con số trước nữa là số cặp trưởng thành (cũng tức là bằng số cặp mới sinh của tháng này).

Nếu tiếp tục viết "trong tháng thứ sáu chúng ta có 12 cặp thỏ" thì sẽ buồn tẻ, nên các nhà khoa học thường sử dụng ký hiệu X để chỉ số cặp thỏ và X6 để chỉ số cặp thỏ trong tháng thứ sáu. Và do chuỗi 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... phản ánh sự tiến triển của quần thể thỏ theo thời gian, chuỗi này và những chuỗi tương tự được gọi là chuỗi thời gian [time series]. Ánh xạ thỏ được định nghĩa theo quy tắc:

> Cộng giá trị trước của X với giá trị hiện thời của X, và tổng là giá trị mới của X.

Các số trong chuỗi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... được gọi là dãy số Fibonacci (Fibonacci là biệt hiệu của Leonardo of Pisa), và chúng liên tục xuất hiện trong tự nhiên: trong cấu trúc của hoa hướng dương, quả thông và quả dứa. Chúng thú vị ở chỗ gần như minh họa sự tăng theo số mũ qua thời gian. Những dấu cắt ở hình 6 là các điểm Fibonacci - tức quần thể thỏ như một hàm số của thời gian - còn đường liền phản ánh 2 lũy thừa λt, ký hiệu 2λt, trong đó t là thời gian theo tháng, còn λ là số mũ đầu tiên. Những số mũ nhân với thời gian trong lũy thừa là một cách hữu hiệu để lượng hóa sự tăng đồng nhất theo số mũ. Trong trường hợp này, λ bằng với logarit của một số được gọi là trung bình vàng, một số rất đặc biệt.

Điều lưu ý đầu tiên về hình 6 là các điểm nằm sát với đường cong. Đường cong theo hàm số mũ đặc biệt trong toán học ở chỗ nó phản ánh một hàm số tăng tỉ lệ với giá trị hiện thời. Giá trị càng lớn, nó tăng càng nhanh. Một thứ như hàm số này mô tả động lực của quần thể thỏ là hợp lý, vì số thỏ tháng tiếp theo ít nhiều tỉ lệ với



Hình 6. Chuỗi các dấu cắt biểu thị số cặp thỏ mỗi tháng (dãy số Fibonacci); đường liền nằm gần chúng là sự tăng liên quan theo số mũ

số thỏ tháng này. Điều lưu ý thứ hai về hình 6 là các điểm không nằm trên đường cong. Đường cong là một *mô hình* [model] tốt cho *Ánh xạ thỏ* của Fibonacci, nhưng không hoàn hảo: vào cuối mỗi tháng, số thỏ luôn là số nguyên, và mặc dù đường cong có thể gần với số nguyên chính xác, nó không hoàn toàn đúng bằng số nguyên ấy. Khi quần thể thỏ tăng lên qua các tháng, đường cong ngày càng sát hơn với mỗi số Fibonacci, nhưng không bao giờ trùng với chúng. Khái niệm ngày càng đến gần nhưng không trùng là một khái niệm sẽ xuất hiện trở lại trong cuốn sách này.

Vậy làm thế nào những con thỏ của Leonardo giúp chúng ta nắm được điều gì đó về sự tăng tính không chắc chắn trong dự báo? Giống như mọi quan sát, đếm số thỏ trong vườn là một việc có sai số, giống như chúng ta đã nói ở chương 1 rằng nhiễu gây ra tính không chắc chắn về quan sát. Hãy tưởng tượng Leonardo không để ý ở tháng thứ nhất trong vườn còn một cặp thỏ trưởng thành khác; trong trường hợp đó, số cặp thực tế trong vườn là 2, 3, 5, 8, 13,... Sai số trong dự báo ban đầu (1, 1, 2, 3, 5, 8...) sẽ là chênh lệch giữa con số Thật và dự báo, cụ thể là: 1, 2, 3, 5... (đây cũng là dãy số Fibonacci). Trong tháng 12, sai số này đã đạt đến con số đáng kể là 146 cặp thỏ! Một sai số nhỏ trong số thỏ ban đầu dẫn tới một sai số rất lớn trong dự báo. Thực tế, sai số tăng theo số mũ qua thời gian. Điều này có nhiều ý nghĩa.

Hãy xem xét tác động của sự tăng sai số theo số mũ lên tính không chắc chắn của dự báo. Một lần nữa, hãy đối chiếu sự tăng tuyến tính và sự tăng theo số mũ. Hãy giả sử - với cái giá của nó - rằng chúng ta có thể giảm tính không chắc chắn trong quan sát ban đầu được dùng để tạo nên dự báo. Nếu sự tăng sai số là tuyến tính và chúng ta giảm tính không chắc chắn ban đầu theo hệ số bằng 10, khi ấy có thể dự báo hệ thống xa hơn mười lần trước khi tính không chắc chắn vượt quá cùng ngưỡng. Nếu giảm tính không chắc chắn ban đầu theo hệ số bằng 1000, chúng ta có thể đưa ra dự báo với cùng chất lượng và xa hơn 1000 lần. Đây là một lợi thế của những mô hình tuyến tính. Hoặc chính xác hơn, đây là một lợi thế hiển nhiên của việc chỉ nghiên cứu những hệ thống tuyến tính. Ngược lại, nếu mô hình là phi tuyến và tính không chắc chắn tăng theo số mũ, chúng ta có thể giảm tính không chắc chắn ban đầu theo hệ số bằng 10, nhưng chỉ có thể dự báo xa hơn hai lần với cùng độ chính xác. Trong trường hợp đó, giả sử sự tăng theo số mũ của tính không chắc chắn là đồng nhất theo thời gian, việc giảm tính không chắc chắn bởi một hệ số bằng 1000 sẽ chỉ tăng phạm vi dự đoán theo hệ số bằng 6 với cùng độ chính xác. Việc giảm tính không chắc chắn trong một đo lường hiếm khi là miễn phí (chúng ta phải thuê người đếm số thỏ lần hai), và những mức giảm lớn trong tính không chắc chắn có thể đắt đỏ, nên khi tính không chắc chắn tăng nhanh theo số mũ, chi phí sẽ tăng vùn vụt. Việc cố đạt mục tiêu dự báo bằng cách giảm tính không chắc chắn trong những điều kiện ban đầu có thể tốn kém khủng khiếp.

Thật may, có một cách khác, cho phép chúng ta chấp nhận sự thật đơn giản: không bao giờ có thể chắc chắn rằng một quan sát nào đó đã không bị sai lạc bởi nhiễu. Trong trường hợp thỏ hoặc thóc, có vẻ đúng là có một sự thật, một số nguyên phản ánh câu trả lời đúng. Nếu giảm tính không chắc chắn trong điều kiện ban đầu xuống bằng 0, chúng ta có thể dự báo không có sai số. Nhưng liệu chúng ta có khi nào thật sự chắc chắn về điều kiện ban đầu? Có khi nào một chú thỏ con khác trốn trong nhiễu? Dù suy đoán tốt nhất của chúng ta là có một cặp thỏ trong vườn, trên thực tế có thể có hai, hoặc ba, hoặc nhiều hơn (hoặc có lẽ không có). Khi không chắc chắn về điều kiện ban đầu, chúng ta có thể khảo sát nhiều dự báo khác nhau dưới mô hình bằng cách tạo ra một *dự báo nhóm**: mỗi

* Rổ dự báo (ensemble forecast).

thành phần của nhóm bắt đầu từ một điều kiện ban đầu mà chúng ta nghĩ là hợp lý. Nên một dự báo bắt đầu với X bằng 1, một dự báo bắt đầu với X bằng 2, và cứ thế. Chúng ta nên phân chia nguồn lực hữu hạn như thế nào giữa việc tính toán nhiều dự báo hơn trong nhóm và thực hiện những quan sát tốt hơn về số thỏ hiện thời trong vườn?

Trong Ánh xạ thỏ, chênh lệch giữa dự báo của những thành phần khác nhau trong nhóm sẽ tăng nhanh theo số mũ, nhưng với một dự báo nhóm, chúng ta có thể thấy chúng khác nhau như thế nào, và sử dụng kết quả này như một đánh giá về tính không chắc chắn trong số thỏ kỳ vọng ở một thời điểm cụ thể. Bên cạnh đó, nếu cẩn thận đếm số thỏ sau vài tháng, chúng ta chắc chắn sẽ phải loại ra một số dự báo cá biệt của nhóm. Mỗi dự báo cá biệt này đã được bắt đầu từ một ước lượng về số thỏ có trong vườn ban đầu, nên việc loại ra một dự báo của nhóm trên thực tế cho chúng ta nhiều thông tin hơn về số thỏ lúc đầu. Dĩ nhiên, thông tin này chỉ cần được chứng minh là đúng nếu mô hình thực sự hoàn hảo, mà trong trường hợp này có nghĩa là Ánh xạ thỏ nắm bắt chính xác hành vi sinh sản và tuổi thọ của thỏ. Nhưng nếu mô hình là hoàn hảo, chúng ta có thể sử dụng những quan sát trong tương lai để hiểu về quá khứ; quá trình này được gọi là khử nhiễu [noise reduction]. Nếu hóa ra mô hình không hoàn hảo, chúng ta có thể đi đến những kết quả không ăn khớp.

Nhưng sẽ thế nào nếu chúng ta đang đo lường một thứ không phải là số nguyên, chẳng hạn nhiệt độ hay vị trí của một hành tinh? Và nhiệt độ trong một mô hình thời tiết không hoàn hảo liệu có đúng là cùng một thứ như nhiệt độ trong thế giới thực? Đây là những câu hỏi ban đầu đã khiến các triết gia quan tâm đến hỗn độn. Đầu tiên, chúng ta hãy xét tới câu hỏi bức bách hơn: tại sao loài thỏ đã không chiếm lĩnh thế giới sau 9.000 tháng kể từ năm 1202?

Kéo giãn, gập và sự tăng tính không chắc chắn

Nghiên cứu về hỗn độn tin vào câu châm ngôn khí tượng học rằng không dự báo nào hoàn hảo nếu không có một ước lượng hữu ích về tính không chắc chắn của dự báo: nếu biết điều kiện ban đầu là không chắc chắn, chúng ta không chỉ quan tâm đến bản thân dự báo, mà còn quan tâm không kém đến việc biết sai số dự báo có thể là gì. Sai số dự báo cho bất kỳ hệ thống thực nào không nên tăng vô giới hạn; ngay cả nếu bắt đầu với một sai số nhỏ, như một hạt thóc hoặc một con thỏ, sai số dự báo sẽ không trở nên lớn tùy tiện (trừ phi có một người dự báo rất ngây thơ), mà sẽ bão hòa gần một giá trị giới hạn nào đó, và kể cả tổng thể cũng vậy. Nhà toán học có một cách tránh những sai số dự báo lớn một cách kỳ cục (ngoại trừ những sai số do ngây thơ), cụ thể là khiến tính không chắc chắn ban đầu trở nên nhỏ *vô cực nhỏ* [infinitesimally] - nhỏ hơn bất kỳ con số nào bạn có thể nghĩ ra, nhưng vẫn lớn hơn zero (0). Một tính không chắc chắn như vậy sẽ luôn cực nhỏ, ngay cả nếu nó tăng nhanh theo số mũ.

Các nhân tố tự nhiên như tổng lượng thức ăn cho thỏ trong vườn hay dung lượng trong một hệ thống email sẽ giới hạn sự tăng trong thực tế. Có thể cảm nhận được các giới hạn ngay cả nếu không biết đích xác cái gì gây ra chúng: tôi nghĩ mình đã đánh rơi chìa khóa ở công viên; dĩ nhiên chúng có thể cách đây nhiều dặm, nhưng rất khó có khả năng chúng ở cách xa hơn mặt trăng. Tôi không cần hiểu hay tin vào quy luật hấp dẫn mới biết rõ điều đó. Tương tự, các nhà dự báo thời tiết hiếm khi sai lệch tới 100 độ, ngay cả đối với một dự báo trước từ một năm! Kể cả những mô hình không phù hợp thường cũng được đặt điều kiện ràng buộc để sai số dự báo của chúng nằm trong giới hạn.

Mỗi khi mô hình của chúng ta đưa ra những giá trị mà chưa dữ liệu nào từng đạt tới, một thứ gì đó có lẽ sắp sụp đổ, trừ trường hợp đã có thứ gì đó trong mô hình sụp đổ rồi. Thông thường,

Tăng theo số mũ: một ví dụ từ lớp ba của cô Nagel

Vài tháng trước, tôi nhận được email từ một người bạn cũ từ hồi học tiểu học. Trong đó có một email khác, từ một nữ giáo viên lớp ba ở North Carolina, và lớp cô đang học về địa lý. Email yêu cầu tất cả những ai đọc được hãy gửi lời đáp, cho biết họ sống ở đâu, và lớp sẽ xác định vị trí đó trên một quả cầu của trường. Email cũng yêu cầu mỗi độc giả chuyển tiếp thư cho mười người bạn của mình.

Tôi không gửi thông điệp cho bất kỳ ai, nhưng tôi viết một email cho lớp của cô Nagel, nói rằng tôi ở Oxford, nước Anh. Tôi cũng gợi ý các em kể cho giáo viên toán của chúng về thí nghiệm và sử dụng nó như một ví dụ minh họa sự tăng theo số mũ: nếu họ gửi thông điệp cho mười người, và ngày hôm sau mỗi người gửi nó cho mười người khác, như thế sẽ là 100 vào ngày thứ ba, 1000 vào ngày thứ tư, và trong khoảng một tuần, con số sẽ nhiều hơn số địa chỉ email thực có. Trong một hệ thống thực, sự tăng theo số mũ không thể tăng mãi: cuối cùng, chúng ta sẽ hết thóc, hết không gian vườn, hoặc hết những địa chỉ email mới. Thường thì tài nguyên giới hạn sự tăng trưởng: ngay một khu vườn tươi tốt cũng chỉ cung cấp một lượng thức ăn hữu hạn cho thỏ. Có những giới hạn đối với tăng trưởng, hạn chế dân số nếu không nói là cả những mô hình của chúng ta về dân số.

Tôi không bao giờ tìm hiểu xem lớp của cô Nagel có học bài học về sự tăng theo số mũ không. Câu trả lời duy nhất tôi từng nhận được là một trả lời tự động, nói rằng hộp email của trường đã vượt quá hạn mức và đã bị đóng lại.

khi tính không chắc chắn trở nên quá lớn, nó bắt đầu gập ngược lại chính nó. Thử tưởng tượng việc nhào bột hoặc một cái máy làm kẹo bơ* liên tục kéo giãn và gập kẹo bơ. Một dải kẹo bơ tưởng tượng gắn kết hai hạt đường rất gần nhau sẽ trở nên ngày càng dài khi hai hạt này tách ra dưới tác động của cái máy, nhưng trước khi nó trở nên lớn hơn chính cái máy, dải này được gập ngược vào chính nó, tạo ra một mớ lộn xộn khủng khiếp. Khoảng cách giữa các hạt đường sẽ ngừng tăng ngay cả khi chuỗi kẹo bơ kết nối chúng tiếp tục mỗi lúc một dài hơn, trở thành mớ lộn xộn mỗi lúc một phức tạp hơn. Cái máy làm kẹo bơ cho chúng ta một cách để hình dung những giới hạn của sự tăng sai số dự báo khi mô hình là hoàn hảo. Trong trường hợp này, sai số là khoảng cách tăng lên giữa trạng thái Đúng và sự ước đoán tốt nhất của chúng ta về trạng thái ấy: bất kỳ sự tăng sai số theo số mũ nào cũng chỉ tương ứng với sự tăng nhanh ban đầu của chuỗi kẹo bơ. Nhưng nếu các dự báo của chúng ta không phóng to đến vô tận (kẹo bơ phải ở trong máy, chỉ một số thỏ hữu hạn phù hợp với khu vườn v.v...), thì cuối cùng dải gắn kết Sự thật với dự báo của chúng ta sẽ bị gập ngược lại chính nó. Đơn giản là không

---

* *toffee*: kẹo bơ cứng, dính, được làm bằng cách đun nóng đường, bơ...

có nơi nào khác để nó tăng tới. Theo nhiều cách, việc đồng nhất chuyển động của một hạt đường trong máy làm kẹo bơ với sự tiến triển của trạng thái một hệ thống hỗn độn trong không gian ba chiều là một cách hữu ích để mường tượng về sự vận động hỗn độn.

Chúng ta muốn có một cảm giác khống chế đối với sự hỗn độn, bởi không mấy ngạc nhiên khi khó có thể dự báo những thứ đang vỡ tung mãi, nhưng cũng không muốn áp đặt một điều kiện quá chặt, chẳng hạn đòi hỏi một dự báo không bao giờ vượt quá một giá trị giới hạn nào đó, bất kể giá trị ấy lớn cỡ nào. Để dung hòa, chúng ta đòi hỏi hệ thống ở một thời điểm nào đó trong tương lai sẽ trở lại gần với trạng thái hiện thời của nó, và diễn ra như vậy lặp đi lặp lại. Nó muốn mất bao lâu để trở lại cũng được, và chúng ta có thể định nghĩa trở lại nghĩa là quay về gần với điểm hiện thời hơn chúng ta từng thấy nó quay về trước đây. Nếu điều này xảy ra, quỹ đạo của nó được gọi là *tái lặp* [recurrent]. Một lần nữa, kẹo bơ đưa ra một thí dụ tương tự: nếu sự vận động là hỗn độn và chúng ta chờ đủ lâu, hai hạt đường sẽ trở lại gần nhau, mỗi hạt sẽ đi ngang gần vị trí ban đầu của nó trong thí nghiệm, giả sử không ai tắt máy trong quá trình đó.

Hỗn độn trong ngữ cảnh: Tất định, ngẫu nhiên và nhiễu

Mọi hệ thống tuyến tính đều giống nhau, mỗi hệ thống phi tuyến thì phi tuyến theo một cách riêng.

(phỏng theo *Anna Karenina* của Leo Tolstoy)*

Các hệ thống động lực

Hỗn độn là một đặc tính của các hệ thống động lực. Và một hệ thống động lực không là gì khác một nguồn gốc của những quan sát đang thay đổi: khu vườn tưởng tượng của Fibonacci với những con thỏ, khí quyển trái đất như được phản ánh bởi một nhiệt biểu ở sân bay Heathrow

---

* Leo Tolstoy (1828 - 1910), nhà văn Nga.

của London, nền kinh tế như được quan sát thông qua giá cổ phiếu IBM, một chương trình máy tính mô phỏng quỹ đạo của mặt trăng và in ra ngày tháng, địa điểm quan sát được của mỗi kỳ nhật thực trong tương lai.

Ít nhất có ba loại hệ thống động lực khác nhau. Hỗn độn dễ được xác định nhất trong *những hệ thống động lực toán học* [mathematical dynamical system]. Những hệ thống này hàm chứa một quy tắc: bạn đưa vào một số và lấy ra một số mới, sau đó bạn đưa số mới vào, lấy ra một số mới nữa, rồi lại đưa vào, và cứ thế. Quá trình này được gọi là ***phép lặp*** [iteration]. Số thỏ mỗi tháng trong khu vườn tưởng tượng của Fibonacci là ví dụ hoàn hảo về một chuỗi thời gian từ kiểu hệ thống này. Kiểu hệ thống động lực thứ hai có trong thế giới thực nghiệm của nhà vật lý học, nhà sinh học hoặc nhà buôn bán cổ phiếu trên thị trường chứng khoán. Ở đây, chuỗi quan sát của chúng ta bao gồm những đo lường thực tại có nhiễu, về cơ bản là khác với những số liệu không nhiễu của Ánh xạ thỏ. Trong những *hệ thống động lực vật lý* [physical dynamical system] - thí dụ khí quyển trái đất và quần thể chuột đồng vùng Scandinavia - các con số biểu diễn trạng thái, trong khi ở Ánh xạ thỏ chúng *chính là* trạng thái. Để tránh lầm lẫn không cần thiết, chúng ta nên phân biệt một trường hợp thứ ba khi máy tính digital* thực hiện phép tính số học do một hệ thống động lực toán học định ra; chúng ta sẽ gọi đây là một *mô phỏng máy tính* [computer simulation] - ví dụ thường thấy là những chương trình máy tính tạo ra các dự báo thời tiết trên truyền hình. Quan trọng là nhớ rằng đây là những *kiểu* hệ thống khác nhau, mỗi thứ lại là một con thú khác: những phương trình tốt nhất của chúng ta về thời tiết khác với những mô hình máy tính tốt nhất dựa trên những phương trình ấy, và cả hai hệ thống này khác với cái thực tế, tức khí quyển của trái đất. Rắc rối là ở chỗ các con số từ mỗi loại trong ba hệ thống đều được gọi là chuỗi thời gian, và chúng ta liên tục phải nhớ sự phân biệt giữa những gì chứa các chuỗi thời gian này: một con số thỏ tưởng tượng, nhiệt độ Đúng ở phi trường (nếu tồn tại một thứ như vậy), một đo lường mô tả nhiệt độ đó, và một mô phỏng máy tính về nhiệt độ đó.

Những khác biệt này quan trọng đến đâu là tùy vào điều chúng ta định làm. Giống như những người chơi bài trong tranh La Tour, các nhà khoa học, toán học, thống kê và triết học, mỗi người đều có những năng lực và mục đích khác nhau. Có thể nhà vật lý học định mô tả những quan sát bằng

---

* Máy tính thao tác với dữ liệu dạng kỹ thuật số, để phân biệt với máy tính sử dụng tín hiệu tương tự (analog) hoặc hỗn hợp (hybrid).

một mô hình toán học, kiểm chứng mô hình bằng cách dùng nó để dự báo những quan sát tương lai. Nhà vật lý học sẵn sàng hy sinh tính dễ vận dụng về toán học để có sự thích hợp về vật lý. Nhà toán học thích chứng minh những thứ đúng cho một phạm vi rộng các hệ thống, nhưng đánh giá bằng chứng quá cao đến mức thường không quan tâm phải giới hạn phạm vi đó rộng đến đâu để có được nó. Chúng ta hầu như luôn phải thận trọng mỗi khi nghe nhà toán học nói "***hầu hết mọi***" [almost every]. Nhà vật lý học phải cẩn thận đừng quên điều này để rồi lẫn lộn sự hữu ích toán học với sự thích hợp vật lý; những trực giác vật lý không nên bị làm sai chệch bởi những đặc tính của các hệ thống "được hiểu rõ" và chỉ được thiết kế vì tính dễ vận dụng toán học.

Nhà thống kê quan tâm mô tả những thống kê thú vị từ chuỗi thời gian của các quan sát thực, nghiên cứu đặc tính của những hệ thống động lực đã sinh ra các chuỗi thời gian trông như những quan sát, và luôn thận trọng đưa ra ít giả định nhất có thể. Cuối cùng, nhà triết học chất vấn mối quan hệ giữa hệ thống vật lý nền tảng mà chúng ta cho là đã sinh ra những quan sát, bản thân những quan sát ấy, và những mô hình toán học hoặc kỹ thuật thống kê được tạo ra để phân tích chúng. Ví dụ, nhà triết học quan tâm đến việc chúng ta biết gì về mối quan hệ giữa nhiệt độ được đo lường và nhiệt độ thật (nếu tồn tại một thứ như vậy), và liệu những giới hạn trong hiểu biết của chúng ta có thuần túy là những khó khăn thực tiễn có thể giải quyết, hay là những giới hạn mà về nguyên tắc không bao giờ khắc phục được.

Những hệ thống động lực toán học và các điểm thu hút

Chúng ta thường thấy bốn loại động thái hay bốn kiểu ứng xử trong chuỗi thời gian. Chúng có thể (i) vận động ngày càng chậm rồi dừng lại, ít nhiều lặp lại cùng một số cố định; (ii) nảy lên theo nhiều hướng xung quanh một vòng tròn khép kín, giống như một đĩa hát bị vỡ, định kỳ lặp lại cùng hình thái: nói cách khác, hoàn toàn là cùng một chuỗi số nhưng lặp đi lặp lại; (iii) vận động theo một vòng tròn có nhiều hơn một kỳ, nên không hẳn lặp lại y hệt mà gần giống, chẳng hạn khoảnh khắc thủy triều dâng cao theo chiều hướng thời gian trong ngày; hoặc (iv) diễn biến thất thường, cũng có khi bình lặng nhưng không biểu hiện một hình thái rõ rệt nào. Loại thứ tư trông như ngẫu nhiên, nhưng biểu hiện bề ngoài có thể lừa dối. Hỗn độn có thể trông như ngẫu nhiên, nhưng nó không ngẫu nhiên. Thật ra, một khi đã học cách nhìn tốt hơn, với chúng ta, hỗn động thường không còn trông như ngẫu nhiên đến thế nữa. Trong những trang tiếp theo, chúng ta sẽ đưa vào nhiều loại ánh xạ hơn, nhưng có lẽ không còn đơn giản như thóc hay thỏ. Chúng ta cần những ánh xạ này để tạo ra những đồ tạo tác thú vị cho chuyến đi tìm kiếm các loại động thái khác nhau vừa đề cập ở trên. Một số trong các ánh xạ được các nhà toán học tạo ra chính vì mục đích này, trong khi nhà vật lý học có thể lập luận hợp lý rằng một ánh xạ nhất định được sinh ra bằng cách đơn giản hóa các quy luật vật lý. Sự thật thì các ánh xạ đủ đơn giản để mỗi thứ có thể hình thành theo nhiều cách khác nhau.

Trước khi có thể tạo ra một chuỗi thời gian bằng cách lặp một ánh xạ, chúng ta cần một con số nào đó để khởi đầu. Số đầu tiên này được gọi là *điều kiện ban đầu* [initial condition], một ***biểu diễn bằng ký hiệu*** [state] ban đầu mà chúng ta định nghĩa, khám phá, sắp xếp để hệ thống hình thành. Như đã nói ở Chương 2, chúng ta dùng ký hiệu X để viết tắt cho một biểu diễn của hệ thống. Tập hợp mọi biểu diễn có thể có của X được gọi là ***không gian biểu diễn*** [state space]. Với những con thỏ tưởng tượng của Fibonacci, đây sẽ là tập hợp của mọi số nguyên. Giả sử chuỗi thời gian là một mô hình về số côn trùng trung bình trên một dặm vuông vào giữa mùa hè mỗi năm. Trong trường hợp đó, X chỉ là một con số, và không gian biểu diễn - tức tập hợp mọi biểu diễn có thể - sẽ là một đường. Đôi khi cần hơn một con số để thể hiện một biểu diễn, và X sẽ có nhiều hơn một phần tử. Trong những mô hình thú săn mồi - con mồi chẳng hạn, cần phải có số lượng của cả hai quần thể, và X có hai phần tử: nó là một vector. Khi X là một vector bao gồm số chuột đồng (con mồi) và số chồn (thú săn mồi) vào ngày 1 tháng 1 mỗi năm, không gian biểu diễn sẽ là bề mặt hai chiều, tức một mặt phẳng chứa mọi cặp số. Nếu X có ba phần tử (chẳng hạn chuột đồng, chồn và lượng tuyết rơi hàng năm), không gian biểu diễn là một không gian ba chiều chứa mọi bộ ba số. Dĩ nhiên không có lý do gì để dừng ở ba phần tử; tuy các bức tranh trở nên ngày càng khó vẽ ở số chiều cao hơn, nhưng những mô hình thời tiết hiện đại có tới hơn 10 triệu phần tử. Đối với một hệ thống toán học, X thậm chí có thể là một trường liên tục, chẳng hạn độ cao của bề mặt đại dương hay nhiệt độ ở mọi điểm trên bề mặt trái đất. Tuy nhiên, những quan sát của các hệ thống vật lý sẽ không bao giờ phức tạp hơn một vector, và do chúng ta chỉ đo lường một số hữu hạn các thứ, nên những quan sát sẽ luôn là những vector với số chiều hữu hạn. Hiện thời, chúng ta sẽ xem xét trường hợp X là một số đơn giản, chẳng hạn ½.

Nhớ lại rằng một ánh xạ toán học chỉ là một quy tắc biến một tập hợp giá trị thành một tập hợp giá trị tiếp theo, bạn có thể định nghĩa **Ánh xạ nhân bốn** [Quadrupling Map] theo quy tắc:

Nhân X với 4 để tạo thành giá trị mới của X.

Với một điều kiện ban đầu, chẳng hạn X = ½, hệ thống động lực toán học này tạo ra một chuỗi thời gian gồm các giá trị của X, trong trường hợp này là ½ x 4 = 2; 2 x 4 = 8; 8 x 4 = 32 ... và chuỗi thời gian là ½, 2, 8, 32, 128, 512, 2048... Chuỗi này ngày càng lớn hơn, và từ quan điểm động lực học, điều đó không thú vị lắm. Nếu một chuỗi thời gian của X tăng vô giới hạn như chuỗi này, chúng ta gọi nó là *không giới hạn* [unbounded]. Để có một hệ thống động lực với X giới hạn, chúng ta sẽ lấy một ví dụ thứ hai, **Ánh xạ chia bốn** [Quartering Map]:

Lấy X chia bốn để được giá trị mới của X

Khởi đầu với X=½, chuỗi thời gian là 1/8, 1/32, 1/128, ... Thoạt nhìn, điều này không hẳn lý thú vì X nhanh chóng co về zero. Nhưng thực ra, Ánh xạ chia bốn đã được tính toán cẩn thận để minh họa những tính chất toán học đặc biệt. Gốc - tức trạng thái biểu diễn X=0 - là một ***điểm cố định*** [fixed point]: nếu khởi đầu ở đó, chúng ta sẽ không bao giờ rời khỏi, vì zero chia bốn vẫn bằng zero. Gốc cũng là ***điểm thu hút*** [attractor] đầu tiên của chúng ta; theo Ánh xạ chia bốn, gốc là đích không tránh khỏi dù rằng không thể tới được: nếu khởi đầu với một giá trị khác của X, chúng ta không bao giờ thực sự đến được điểm thu hút, mặc dù đến rất gần khi số lần lặp tăng lên vô giới hạn. Gần đến mức nào? Gần tùy ý. Gần đến mức nào bạn thích. *Cực* [infinitesimally] gần, nghĩa là gần hơn bất kỳ số nào bạn có thể gọi tên. Hãy nêu ra bất kỳ số nào, và chúng ta có thể tính được cần bao nhiêu lần lặp để sau đó X gần zero hơn con số đó. Gần tùy ý với một điểm thu hút khi thời gian diễn tiến nhưng không bao giờ thật sự đạt đến nó, đó là một đặc điểm thông thường của nhiều chuỗi thời gian từ những hệ phi tuyến. Quả lắc cho chúng ta một tương tự vật lý: mỗi lần lắc sẽ nhỏ hơn lần trước nó, một hiệu ứng được chúng ta quy cho sức cản của không khí và sự ma sát. Điều tương tự với điểm thu hút là một quả lắc bất động treo thẳng đứng. Chúng ta sẽ nói nhiều hơn về điểm thu hút sau khi đưa thêm một vài hệ thống động lực nữa vào tập hợp.

Trong **Ánh xạ logistic đầy đủ** [Full Logistic Map], chuỗi thời gian từ hầu hết mọi giá trị của X biến động qua lại mãi giữa 0 và 1 mà không biểu lộ một hình thái cụ thể:

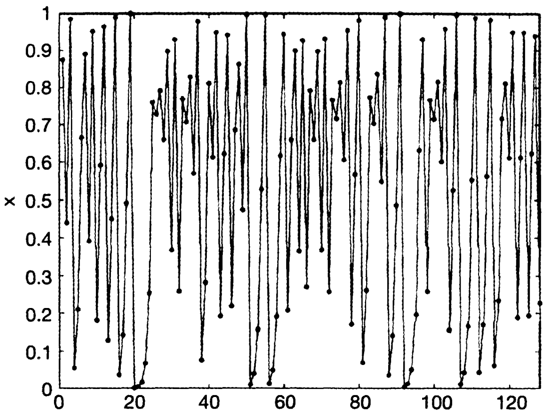
> Lấy X trừ X^2, lấy kết quả nhân bốn để thành giá trị mới của X.

Nếu chúng ta nhân các phần tử của biến số biểu diễn với những phần tử khác, mọi thứ trở nên phi tuyến. Chuỗi thời gian trong trường hợp này là gì nếu chúng ta lại bắt đầu với X bằng ½? Khởi đầu với ½, X trừ X^2 bằng ¼, nhân với bốn bằng 1, vậy giá trị mới là 1. Tiếp tục với X bằng 1, chúng ta có X trừ X^2 bằng 0. Nhưng 0 nhân 4 luôn bằng 0, nên từ đó về sau chỉ là 0. Và chuỗi thời gian của chúng ta là ½, 1, 0, 0, 0,... Chuỗi này không phình to lên, nhưng cũng không mấy thú vị nếu chúng ta nhớ lại lời cảnh báo về tuyên bố "hầu hết mọi" của nhà toán học.

Thứ tự của các số trong chuỗi thời gian là quan trọng, dù đó là chuỗi phản ánh số thỏ hàng tháng của Fibonacci hay những bước lặp của Ánh xạ logistic đầy đủ. Sử dụng cách ký hiệu được đề cập ở Chương 2, chúng ta sẽ viết X_5 để chỉ giá trị thứ năm của X, và X_0 để chỉ biểu diễn (hay quan sát) ban đầu, và tổng quát X_i cho giá trị thứ i. Dù chúng ta đang lặp lại ánh xạ hay thực hiện quan sát, i luôn là một số nguyên và thường được gọi là "lần thứ" (time).

Trong Ánh xạ logistic đầy đủ với X_0 bằng ½, X_1 sẽ bằng 1, X_2 bằng 0, X_3 bằng 0, X_4 bằng 0, và X_i bằng không với mọi i lớn hơn bốn. Nên gốc lại vẫn là một điểm cố định. Nhưng dưới Ánh xạ logistic đầy đủ, các giá trị nhỏ của X sẽ tăng lên (bạn có thể dùng máy tính để kiểm tra), X=0 là không ổn định nên gốc không phải là một điểm thu hút. Trên thực tế, một chuỗi thời gian khởi đầu gần gốc khó có khả năng rơi vào một trong ba trường hợp như đã đề cập ở đầu mục này, mà bật qua bật lại mãi một cách hỗn độn.

Hình 7 trình bày một chuỗi thời gian bắt đầu gần mức X_0 bằng 0,876. Nó miêu tả một chuỗi thời gian hỗn độn từ Ánh xạ logistic đầy đủ. Nhưng hãy nhìn kỹ: có thật trông nó hoàn toàn không thể đoán trước? Có vẻ sau các giá trị nhỏ của X là các giá trị nhỏ của X, và chuỗi thời gian có một khuynh hướng nấn ná mỗi khi ở gần mức 0,75. Nhà vật lý học nhìn vào chuỗi này sẽ kỳ vọng nó có thể dự đoán được ít nhất trong một số lần, còn nhà thống kê sau một vài tính toán



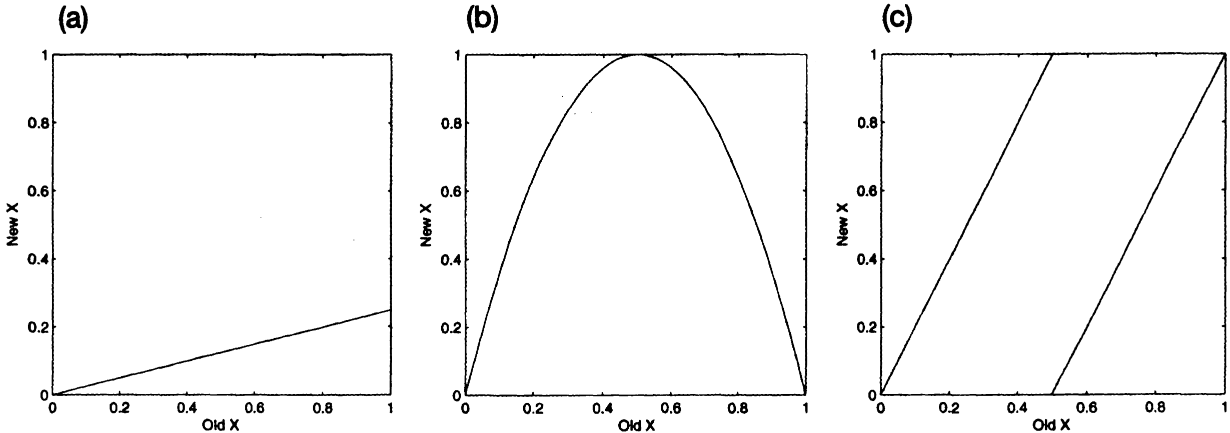
Hình 7. Một chuỗi thời gian hỗn độn từ Ánh xạ logistic đầy đủ, khởi đầu gần X_0 bằng 0,876. Chúng ta thấy chuỗi này trông như đoán trước được mỗi khi X gần 0 và 0,75.

thậm chí có thể tuyên bố nó là ngẫu nhiên. Dù chúng ta thấy được cấu trúc, những kiểm chứng thống kê thông thường nhất lại không.

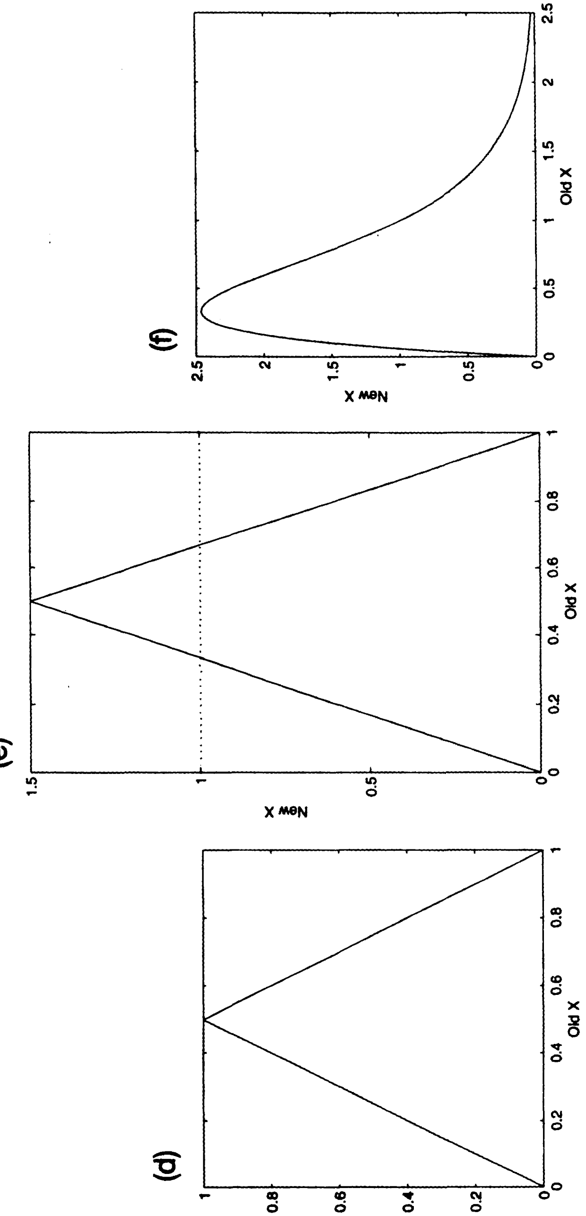
Một bộ ánh xạ

Quy tắc xác định một ánh xạ có thể được phát biểu bằng lời, bằng một phương trình, hoặc bằng một đồ thị. Mỗi biểu đồ trong hình 8 định nghĩa quy tắc bằng đồ thị. Để sử dụng đồ thị, hãy tìm giá trị hiện thời của X trên trục ngang, sau đó di chuyển theo chiều thẳng đứng tới khi đụng đường cong; giá trị của điểm này trên đường cong chiếu theo trục đứng là giá trị mới của X. Ánh xạ logistic đầy đủ được biểu diễn bằng đồ thị trong hình 8 (b), còn Ánh xạ chia bốn ở khung (a).

Một cách dùng đồ thị để dễ dàng kiểm tra xem một điểm cố định có bất ổn định không là nhìn vào độ dốc của đồ thị tại điểm cố định: nếu độ dốc hơn 45 độ (lên hoặc xuống), điểm cố định là không ổn định. Trong Ánh xạ chia bốn, hệ số góc ở mọi điểm đều nhỏ hơn 1, còn đối với Ánh xạ logistic đầy đủ, hệ số góc ở gần gốc lớn hơn 1. Ở đây, những giá trị nhỏ nhưng lớn hơn 0 của X sẽ tăng với mỗi bước lặp, nhưng chỉ chừng nào chúng đủ nhỏ (hệ số góc gần điểm ½ là zero). Như chúng ta sẽ thấy dưới đây, với *hầu hết mọi* điều kiện ban đầu giữa 0 và 1, chuỗi thời gian



Hình 8. Mô tả bằng đồ thị của (a) Ánh xạ chia bốn, (b) Ánh xạ logistic đầy đủ, (c) Ánh xạ dịch chuyển, (d) Ánh xạ lều, (e) Ánh xạ lều nhân ba, và (f) Ánh xạ Moran-Ricker


(d)
(e)
(f)
New X
Old X
New X
Old X
New X
Old X

biểu thị ***hỗn độn*** [chaos] toán học đích thực. Ánh xạ logistic đầy đủ là khá đơn giản; hỗn độn là điều khá thông thường.

Để thấy một hệ thống toán học có ***tất định*** [deterministic] không, chỉ cần cẩn thận kiểm tra xem việc thực hiện quy tắc có đòi hỏi một số ngẫu nhiên không. Nếu không, hệ thống động lực ấy là tất định: mỗi khi đưa vào cùng một giá trị của X, chúng ta lấy ra cùng một giá trị mới của X. Nếu quy tắc đòi hỏi (thật sự đòi hỏi) một số ngẫu nhiên, hệ thống là ngẫu nhiên, còn gọi là *stochastic**. Với một hệ thống ngẫu nhiên, ngay cả nếu lặp lại *chính xác* cùng một điều kiện ban đầu, chúng ta cũng kỳ vọng những giá trị X cụ thể tiếp theo sẽ khác, cũng tức là chuỗi thời gian sẽ khác. Nhìn lại định nghĩa, chúng ta thấy ba ánh xạ được xác định ở trên đều tất định; chuỗi thời gian tương lai của chúng hoàn toàn được quyết định bởi điều kiện ban đầu, bởi vậy chúng được gọi là "hệ thống tất định". Nhà triết học sẽ chỉ ra rằng biết X không thôi là không đủ, chúng ta còn phải biết hệ thống toán học và phải có năng lực thực hiện những tính toán chính xác với nó. Đây là những gì mà từ 200 năm trước, Laplace đã đảm bảo rằng con quỷ của ông sở hữu.

---

* Được quyết định một cách ngẫu nhiên, có một hình thái đồ thị dạng ngẫu nhiên.

Hệ thống động lực ngẫu nhiên đầu tiên là **Ánh xạ AC** [AC Map]:

> Lấy X chia bốn, sau đó trừ đi ½, kết quả cộng với một số ngẫu nhiên R để được giá trị mới của X.

Ánh xạ AC là một hệ thống ngẫu nhiên vì việc áp dụng quy tắc đòi hỏi tiếp cận một nguồn cung cấp các số ngẫu nhiên. Quy tắc trên thật ra chưa hoàn thiện: nó không nói rõ làm thế nào có được R. Để hoàn tất định nghĩa, chúng ta phải bổ sung thêm một thứ như: để có R cho mỗi bước lặp, chọn một số giữa 0 và 1, sao cho mỗi số có khả năng được chọn như nhau, nghĩa là R sẽ được phân bố đồng đều giữa 0 và 1, và xác suất giá trị tiếp theo của R rơi vào một khoảng giá trị sẽ tỉ lệ với bề rộng của khoảng ấy.

Chúng ta sử dụng quy tắc nào để chọn R? Đó không thể là một quy tắc tất định, vì như thế R sẽ không ngẫu nhiên. Có thể nói không có quy tắc rõ ràng nào để tạo ra những giá trị của R. Nó không liên quan đến việc cần những số đồng đều giữa 0 và 1. Nó cũng không ổn nếu chúng ta muốn tạo ra những số ngẫu nhiên bắt chước phân bố "hình chuông" của Galton. Chúng ta sẽ phải dựa vào nhà thống kê để bằng cách nào đó tạo ra những số ngẫu nhiên mà chúng ta cần. Bởi vậy từ đây về sau, chúng ta sẽ chỉ nói chúng có phân bố đồng đều hay phân bố hình chuông.

Trong Ánh xạ AC, mỗi giá trị của R được sử dụng trong ánh xạ, nhưng có một lớp các ánh xạ ngẫu nhiên khác được gọi là Những hệ thống hàm lặp [Iterated Function Systems], gọi tắt là IFS. Chúng có vẻ sử dụng giá trị của R nhưng không phải trong một công thức, mà để đưa ra một quyết định về điều phải làm. Một ví dụ là Ánh xạ IFS phần ba giữa - sau này sẽ được dùng đến để tìm hiểu những đặc tính của ánh xạ từ các chuỗi thời gian mà chúng tạo ra. Ánh xạ IFS phần ba giữa là:

> Lấy một số ngẫu nhiên R từ một phân bố đồng đều giữa 0 và 1.
> Nếu R nhỏ hơn ½, lấy X/3 làm giá trị mới của X.
> Trường hợp khác, lấy 1-X/3 làm giá trị mới của X.

Như vậy, chúng ta đã có một vài hệ thống toán học, có thể dễ dàng cho biết chúng là tất định hay ngẫu nhiên. Vậy những mô phỏng máy tính thì sao? Các mô phỏng bằng máy tính luôn là tất định. Như sẽ thấy ở Chương 7, chuỗi thời gian từ một máy tính sẽ hoặc là một vòng lặp bất tận của những giá trị tự lặp lại chính nó theo chu kỳ, hoặc đang diễn tiến về phía một vòng lặp như vậy. Phần thứ nhất của một chuỗi thời gian trong đó không giá trị nào được lặp lại, quỹ đạo hướng về phía một ***vòng lặp có chu kỳ*** [periodic loop] nhưng chưa đạt đến nó, được gọi là ***nhất thời*** [transient]. Trong giới toán học, từ này nghe có vẻ không hay vì các nhà toán học thích làm việc với những thứ tồn tại lâu dài, không phải những thứ chỉ nhất thời. Trong khi các nhà toán học tránh những thứ nhất thời, các nhà vật lý học có thể lại không bao giờ thấy bất kỳ thứ gì khác, và hóa ra máy tính không thể xác nhận chúng. Trớ trêu ở chỗ, máy tính tuy đã chứng tỏ có vai trò thiết yếu trong việc thúc đẩy hiểu biết của chúng ta về hỗn độn, lại không thể trình bày chính những hỗn độn toán học ấy. Một máy tính cũng không thể tạo ra những số ngẫu nhiên. Cái gọi là bộ sinh số ngẫu nhiên trên máy tính thực ra chỉ là bộ sinh số giả ngẫu nhiên; một trong những bộ sinh số đầu tiên như vậy thậm chí được dựa trên Ánh xạ logistic đầy đủ! Khác biệt giữa hỗn độn toán học và những mô phỏng máy tính giống như giữa số ngẫu nhiên và số giả ngẫu nhiên, và minh họa sự khác biệt giữa các hệ thống toán học và những mô phỏng máy tính.

Những ánh xạ ở hình 8 không tình cờ ở đó. Các nhà toán học thường tạo nên những hệ thống sao cho chúng dễ giúp họ minh họa một ý nghĩa toán học nào đó hoặc cho phép ứng dụng một thủ thuật toán học nào đó - một từ đôi lúc được sử dụng để che đi một khéo léo kỹ thuật. Những ánh xạ thật sự phức tạp - bao gồm những ánh xạ để dẫn đường tàu vũ trụ và những ánh xạ gọi là "mô hình khí hậu", hay thậm chí những ánh xạ lớn hơn, được sử dụng trong dự báo về thời tiết - rõ ràng được xây dựng bởi các nhà vật lý học, không phải các nhà toán học. Nhưng chúng đều hoạt động theo cùng cách: một giá trị của X đi vào, và một giá trị mới của X đi ra. Cơ chế này hoàn toàn giống như những ánh xạ đã định nghĩa ở trên, kể cả khi X có thể có trên 10 triệu phần tử.

Các tham số và cấu trúc mô hình

Mỗi quy tắc định nghĩa những ánh xạ ở trên đều bao hàm những con số khác ngoài số biểu diễn, chẳng hạn các số như bốn và một nửa. Các số này được gọi là ***tham số*** [parameter]. Tuy X thay đổi theo thời gian, các tham số lại cố định. Việc đối chiếu các chuỗi thời gian được tạo ra theo những giá trị tham số khác nhau đôi lúc sẽ hữu ích. Nên thay vì định nghĩa ánh xạ với một giá trị tham số cụ thể, chẳng hạn 4, các ánh xạ thường được định nghĩa bằng cách sử dụng một ký hiệu cho tham số, giả sử α (alpha). Chúng ta có thể so sánh dáng điệu của ánh xạ tại α bằng 4 với trường hợp α bằng 2, hoặc $\alpha = 3{,}569945$. Các ký hiệu Hy Lạp thường được sử dụng để phân biệt rõ tham số với biến số biểu diễn. Viết lại Ánh xạ logistic đầy đủ với một tham số, và chúng ta có một trong những hệ thống động lực phi tuyến nổi tiếng nhất: **Ánh xạ logistic** [Logistic Map]:

> Lấy X trừ X^2, kết quả nhân với α ra giá trị mới của X.

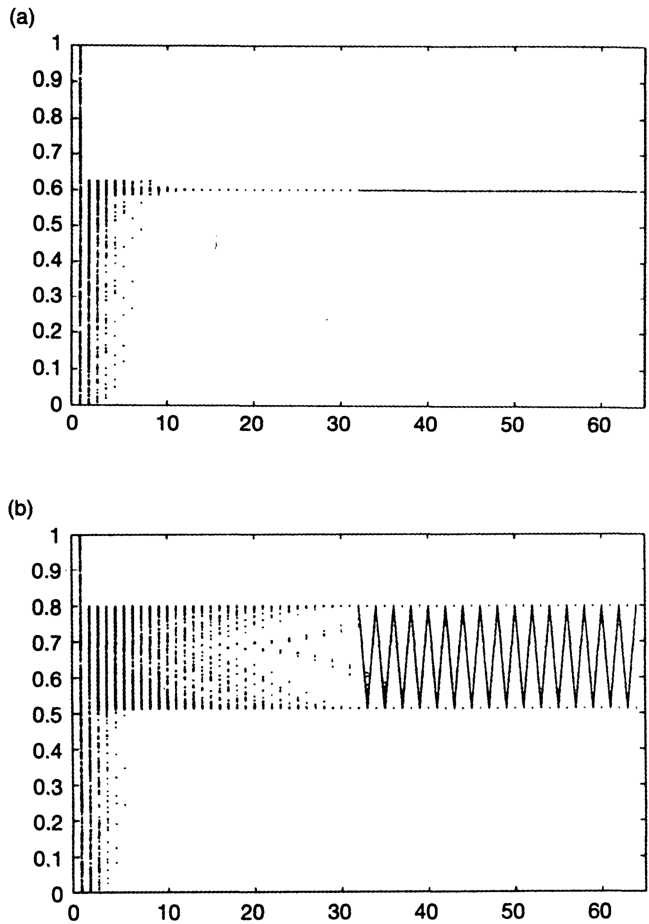
Trong những mô hình vật lý, tham số được sử dụng để miêu tả những thứ như nhiệt độ sôi của nước, khối lượng của trái đất, tốc độ ánh sáng, hay thậm chí tốc độ băng "rơi" trong tầng khí quyển cao. Các nhà thống kê thường bỏ qua sự phân biệt giữa tham số và số biểu diễn, trong khi các nhà vật lý có xu hướng cho tham số một địa vị đặc biệt. Các nhà toán học ứng dụng trên thực tế thường đẩy tham số về phía vô cực lớn hoặc vô cực nhỏ; chẳng hạn, nghiên cứu dòng không khí trên một cái cánh dài vô cực sẽ dễ hơn. Như đã nói, những khác biệt về quan điểm này sẽ có ý nghĩa trong từng bối cảnh cụ thể. Chúng ta có đòi hỏi một giải pháp chính xác cho một câu hỏi ước chừng, hoặc một câu trả lời ước chừng cho một câu hỏi cụ thể không? Trong các hệ thống phi tuyến, đây có thể là những thứ rất khác nhau.

Điểm thu hút

Nhắc lại Ánh xạ chia bốn, chúng ta thấy sau một bước lặp, mỗi điểm giữa 0 và 1 sẽ trở thành điểm giữa 0 và ¼. Do mọi điểm giữa 0 và ¼ cũng là mọi điểm giữa 0 và 1, nên không điểm nào trong số này có thể đạt tới những giá trị lớn hơn 1 hoặc nhỏ hơn 0. Những hệ thống động lực mà xét trung bình, các đoạn thẳng (hoặc diện tích, thể tích trong không gian hai hoặc ba chiều) co lại được gọi là ***tán xạ*** [dissipative]. Mỗi khi một ánh xạ tán xạ tịnh tiến một thể tích của không gian biểu diễn vào hẳn bên trong nó, chúng ta lập tức biết rằng có tồn tại một điểm thu hút, nhưng không biết nó trông như thế nào.

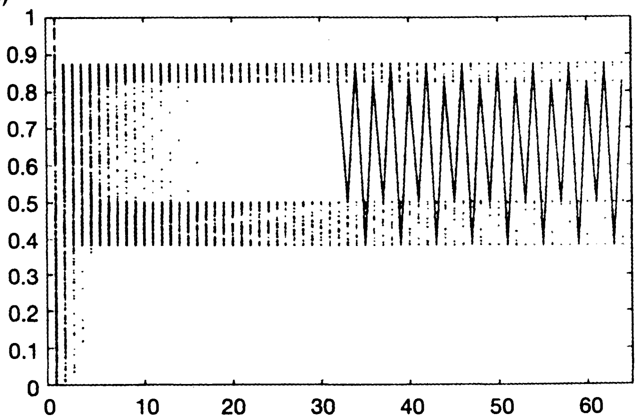
Bất kỳ khi nào α nhỏ hơn 4, chúng ta có thể chứng minh Ánh xạ logistic có một điểm thu hút bằng cách nhìn vào những gì xảy ra với mọi điểm giữa 0 và 1. Giá trị mới lớn nhất của X mà chúng ta có thể đạt được là ở bước lặp có X bằng ½. (Bạn thấy được điều này ở hình 8 không?) Giá trị lớn nhất là α/4, và chừng nào α nhỏ hơn 4, giá trị lớn nhất này nhỏ hơn 1. Điều đó có nghĩa là mọi điểm giữa 0 và 1 được lặp đến một điểm giữa 0 và α/4, và mãi mãi bị giới hạn trong đó. Nên hệ thống phải có một điểm thu hút. Với những giá trị nhỏ của α, điểm X = 0 là điểm thu hút, không khác với Ánh xạ chia bốn. Nhưng nếu α lớn hơn 1, khi ấy bất kỳ giá trị nào của X gần 0 sẽ đi xa khỏi 0, và điểm thu hút nằm ở nơi khác. Đây là một ví dụ về một "chứng minh không kiến tạo": chúng ta có thể chứng minh rằng một điểm thu hút tồn tại, nhưng đáng thất vọng là sự chứng minh không nói cho chúng ta biết phải tìm nó như thế nào, hoặc đưa ra bất kỳ gợi ý nào về các tính chất của nó!

Trong hình 9, nhiều chuỗi thời gian của Ánh xạ logistic được trình bày cho mỗi giá trị trong bốn giá trị khác nhau của α. Ở từng đồ thị, bắt đầu với 512 điểm, được lấy ngẫu nhiên giữa 0 và 1. Tại mỗi bước lặp, dịch chuyển toàn bộ các điểm đi tới theo thời gian. Ở bước thứ nhất, chúng ta thấy mọi điểm đều lớn hơn 0, nhưng đi xa khỏi điểm X = 1 và không bao giờ trở lại: chúng ta có một điểm thu hút. Trong trường hợp (a), chúng ta thấy chúng co rút về vòng lặp chu kỳ một; ở (b) chúng co rút về hai điểm trong vòng lặp chu kỳ hai; ở (c) chúng co rút về bốn điểm trong vòng lặp chu kỳ bốn; ở (d), có thể thấy chúng đang co rút, nhưng không rõ chu kỳ là gì. Để khiến động lực này trở nên dễ thấy hơn, một thành phần của tập hợp điểm được chọn ngẫn nhiên ở giữa đồ thị, và các điểm trên đường diễn tiến của nó được kết nối lại bằng một đường từ điểm đó trở đi. Vòng lặp chu kỳ một (a) hiển thị như một đường thẳng, trong khi đó (b) và (c) cho thấy đường diễn tiến luân phiên lần lượt giữa hai hoặc bốn điểm. Trường hợp (d) ban đầu trông như một vòng lặp chu kỳ bốn, nhưng nhìn kỹ hơn, chúng ta thấy có nhiều hơn bốn lựa chọn, và mặc dù có sự đều đặn trong thứ tự chạm đến những dải băng của các điểm, tính chu kỳ đơn giản lại không dễ nhận thấy.

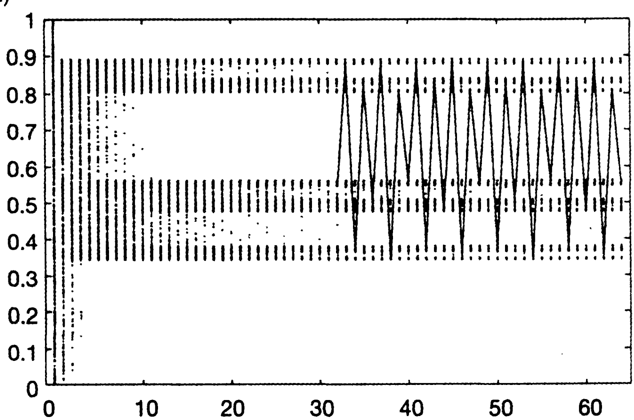


Hình 9. Mỗi đồ thị biểu thị sự diễn tiến của 512 điểm, ban đầu được phân bố ngẫu nhiên giữa 0 và 1, và được dịch chuyển tới theo Ánh xạ logistic. Mỗi đồ thị trình bày một trong bốn giá trị khác nhau của α, cho thấy sự co rút về phía (a) một điểm

(c)



(d)



cố định, (b) một vòng lặp chu kỳ hai, (c) một vòng lặp chu kỳ bốn, và (d) sự hỗn độn. Đường liền bắt đầu từ lần lặp thứ 32 biểu thị diễn tiến của một điểm, với mục đích làm cho hướng đi ở mỗi điểm thu hút trở nên dễ thấy hơn.

Để có một bức tranh khác về cùng hiện tượng, chúng ta có thể khảo sát đồng thời nhiều điều kiện ban đầu khác nhau và nhiều giá trị khác nhau của α, chẳng hạn như ở hình 13. Trong không gian ba chiều, có thể thấy những biểu diễn ban đầu nằm rải rác ngẫu nhiên ở phần bên trái màu đen của hộp. Ở mỗi bước lặp, chúng di chuyển ra ngoài về phía bạn, và các điểm co rút về phía hình thái được trình bày ở hai hình trước đó. Các biểu diễn ngẫu nhiên ban đầu được lặp và được hiển thị sau 0, 2, 8, 32, 512 lần lặp. Phải mất một lúc phần nhất thời mới tan rã, nhưng có thể thấy các hình thái tương tự xuất hiện khi các biểu diễn đạt tới mặt trước của hộp.

Điều chỉnh các tham số của mô hình và tính ổn định cấu trúc

Giờ đây, chúng ta thấy rằng một hệ thống động lực có ba thành phần: quy tắc toán học xác định cách có được giá trị tiếp theo, các giá trị của tham số, và biểu diễn hiện thời. Dĩ nhiên, có thể thay đổi bất kỳ yếu tố nào trong số ấy và xem điều gì xảy ra, nhưng nên xác định rõ loại thay đổi mà chúng ta đang thực hiện. Tương tự, có thể thấy rõ tính không chắc chắn ở một trong những thành phần này, và điều đáng quan tâm là tránh giải thích tính không chắc chắn ở một thành phần bằng cách lầm lẫn gán nó cho thành phần khác.

Nhà vật lý học có thể đang tìm mô hình "Đúng", hoặc chỉ đang tìm một mô hình hữu ích. Thực ra có một nghệ thuật "điều chỉnh" các giá trị tham số. Và trong khi tính chất phi tuyến đòi hỏi xem lại biện pháp tìm ra "những giá trị tham số tốt", hỗn độn sẽ buộc chúng ta đánh giá lại ngụ ý của từ "tốt". Một khác biệt rất nhỏ trong giá trị của một tham số, có tác động không đáng kể lên chất lượng của một dự báo ngắn hạn, lại có thể thay đổi hình dạng của một điểm thu hút mà chúng ta không nhận ra. Những hệ thống mà điều này xảy ra được gọi là *bất ổn định về cấu trúc* [structurally unstable]. Như Lorenz đã lưu ý trong những năm 1960, các nhà dự báo thời tiết không cần lo lắng, nhưng những người dựng mô hình khí hậu thì phải lo.

Rất nhiều lẫn lộn đã nảy sinh do không thể phân biệt giữa tính không chắc chắn trong biểu diễn hiện thời, tính không chắc chắn trong giá trị của một tham số, và tính không chắc chắn liên quan đến bản thân cấu trúc mô hình. Lý thuyết mà nói, sự hỗn độn là tính chất của một hệ thống động lực với những phương trình (cấu trúc) cố định và những giá trị tham số đã được xác định, nên tính không chắc chắn dẫn tới sự hỗn độn chỉ là tính không chắc chắn trong biểu diễn ban đầu. Còn trong thực tế, những phân biệt này trở nên mờ nhạt, và tình huống trở nên thú vị, rối loạn hơn nhiều.

Những mô hình thống kê về các vết đen mặt trời

Hỗn độn chỉ được tìm thấy trong những hệ thống tất định. Nhưng để hiểu tác động của nó lên khoa học, chúng ta cần xem xét nó trên nền tảng những mô hình ngẫu nhiên truyền thống được hình thành trong thế kỷ vừa qua. Mỗi khi thấy điều gì đó lặp đi lặp lại trong tự nhiên, sự vận động theo chu kỳ là một trong những giả thuyết đầu tiên được chúng ta đưa ra. Nó có thể khiến bạn trở nên nổi tiếng: sao chổi Halley, số vết đen mặt trời của Wolf. Rốt cục, cái tên thường dính chặt kể cả khi chúng ta nhận ra hiện tượng không thật sự tuân theo chu kỳ. Khi có chưa tới 20 năm dữ liệu, Wolf* đã đoán rằng mặt trời tuân theo một chu kỳ khoảng 11 năm một lần. Tính chu kỳ vẫn là một khái niệm hữu ích dù không thể chứng minh một hệ thống vật lý là có tính chu kỳ, bất kể chúng ta lấy bao nhiêu dữ liệu. Các khái niệm tất định và hỗn độn cũng vậy.

Dữ liệu về mặt trời cho thấy những tương

---

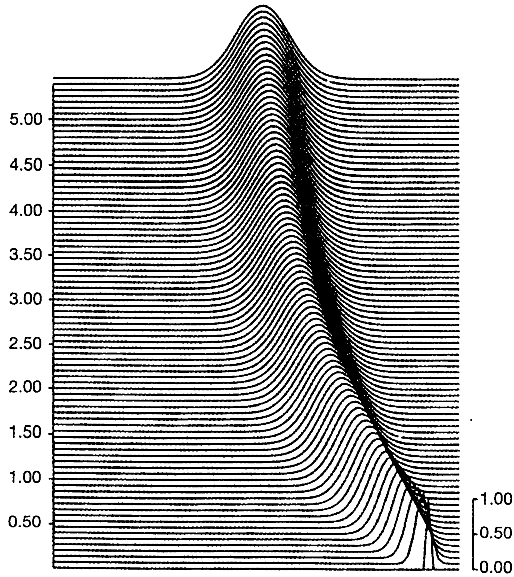
* Rudolf Wolf, nhà thiên văn học và nhà toán học người Thụy Sĩ, nổi tiếng với nghiên cứu về vết đen ở mặt trời.

quan với thời tiết, hoạt động kinh tế, hành vi con người. Thậm chí 100 năm trước, người ta đã "thấy" được chu kỳ 11 năm trong những vòng gỗ của cây. Làm thế nào chúng ta có thể dựng mô hình các vết đen mặt trời? Những mô hình về một quả lắc không ma sát là hoàn toàn mang tính chu kỳ, trong khi chu kỳ mặt trời thì không. Những năm 1920, nhà thống kê Udny Yule (1871 - 1951) người Scotland đã khám phá một cấu trúc mô hình mới, ông biết làm thế nào đưa sự ngẫu nhiên vào mô hình và thu được chuỗi thời gian với dáng điệu trông thực tiễn hơn. Ông ví chuỗi thời gian quan sát được về vết đen mặt trời với những chuỗi thời gian từ một mô hình quả lắc giảm dần, có ma sát và có một chu kỳ tự do khoảng 11 năm. Nếu quả lắc mô hình này được "để một mình trong một căn phòng yên lặng", chuỗi thời gian thu được sẽ chậm dần cho đến không còn gì. Để đưa vào các số ngẫu nhiên nhằm giữ mô hình toán học tiếp tục diễn tiến, Yule mở rộng trường hợp nghiên cứu sang một quả lắc vật lý: "Không may, những đứa bé trai cầm ống xì thổi hạt đậu đi vào căn phòng, bắn loạn xạ vào quả lắc từ mọi phía một cách ngẫu nhiên". Những mô hình thu được đã trở thành một trụ cột chính trong danh mục của nhà thống kê. Một trụ cột tuyến tính, ngẫu nhiên. Chúng ta sẽ định nghĩa **Ánh xạ Yule** [Yule Map]:

Lấy α nhân X, cộng với một giá trị ngẫu nhiên R để được giá trị mới của X, trong đó R được lấy ra ngẫu nhiên từ một phân bố chuẩn hình chuông.

Vậy mô hình ngẫu nhiên này khác gì với một mô hình hỗn độn? Có hai khác biệt chính mà nhà toán học nhận thấy ngay: thứ nhất, mô hình của Yule là ngẫu nhiên - nói cách khác, quy tắc đòi hỏi một bộ sinh số ngẫu nhiên, trong khi một mô hình hỗn độn về vết đen mặt trời theo định nghĩa là tất định. Thứ hai, mô hình của Yule là tuyến tính. Điều này không chỉ ngụ ý rằng chúng ta không nhân các phần tử của biểu diễn với nhau để xác định ánh xạ; nó còn có nghĩa là người ta có thể kết hợp các giải pháp của hệ thống và thu nạp những giải pháp có thể chấp nhận khác, một đặc tính được gọi là *chồng* [superposition]. Chính đặc tính rất hữu ích này là thứ không có trong những hệ thống phi tuyến.

Yule phát triển một mô hình tương tự như Ánh xạ Yule, có động thái giống hơn với chuỗi thời gian của vết đen mặt trời thực tế. Mỗi chu kỳ trong mô hình cải tiến của Yule hơi khác với chu kỳ kế tiếp tùy theo những hiệu ứng ngẫu nhiên, tức những chi tiết do ống xì thổi hạt đậu gây ra. Trong một mô hình hỗn độn, trạng thái biểu diễn về mặt trời sẽ khác từ chu kỳ này đến chu kỳ kế tiếp. Còn về ***tính có thể dự báo*** [predictability]? Ở bất kỳ mô hình hỗn độn nào, hầu như mọi biểu diễn ban đầu gần nhau cuối cùng sẽ hội tụ, trong khi ở từng mô hình trong các mô hình của Yule, ngay cả những biểu diễn ban đầu xa nhau cũng hội tụ *nếu* cả hai chịu cùng lực tác động từ những ống xì thổi hạt đậu. Đây là một khác biệt thú vị và khá căn bản: những trạng thái biểu diễn tương tự sẽ phân kỳ dưới động lực tất định, và hội tụ dưới động lực ngẫu nhiên tuyến tính. Điều đó không nhất thiết khiến mô hình của Yule dễ dự báo hơn, bởi chúng ta không bao giờ biết chi tiết của lực tác động ngẫu nhiên trong tương lai. Nhưng nó thay đổi quỹ đạo của tính không chắc chắn trong hệ thống, chẳng hạn như được trình bày ở hình 10. Ở đây, tính không chắc chắn nhỏ ban đầu, hoặc thậm chí tính không chắc chắn bằng 0 ban đầu ở đáy đã tăng ngày càng rộng và di chuyển về phía trái sau mỗi lần lặp. Lưu ý rằng tính không chắc chắn trong biểu diễn có vẻ đang tiến tới một phân bố hình chuông, và ít nhiều đã ổn định vào lúc đạt tới đỉnh của đồ thị. Một khi tính không chắc chắn bão hòa trong một biểu diễn tĩnh, mọi tính có thể dự báo bị mất đi. Phân bố cuối cùng này được gọi là "xu hướng chung" của mô hình.



Hình 10. Diễn biến của tính không chắc chắn dưới Ánh xạ Yule ngẫu nhiên. Khởi đầu từ một điểm ở đáy đồ thị, tính không chắc chắn lan sang trái khi chúng ta đi tới theo thời gian (từ dưới lên trên) và tiến đến một phân bố hình chuông không đổi.

Các hệ thống động lực vật lý

Không cách gì chứng minh tính đúng đắn của quan điểm "tất định" hay "bất định". Chỉ khi nào khoa học trở nên hoàn thiện hoặc cho thấy là bất khả thi, chúng ta mới có thể quyết định những câu hỏi như vậy.

E. Mach (1905)*

---

* Ernst Mach (1838 - 1916), nhà vật lý và triết học Áo.

Thế giới có nhiều thứ hơn là những mô hình toán học. Hầu như bất kỳ thứ gì chúng ta muốn đo lường trong thế giới thực, hay thậm chí những thứ chúng ta mới chỉ nghĩ tới việc quan sát, cũng có thể được cho là đã đến từ một hệ thống động lực vật lý. Đó có thể là vị trí của một hành tinh trong hệ mặt trời, bề mặt của một ly cà phê trên cái bàn đang rung, số cá trong một ao hồ, số gà ở một điền trang, hay một đồng xu được tung.

Chuỗi thời gian chúng ta muốn quan sát giờ đây là những biểu diễn của hệ thống vật lý, chẳng hạn: vị trí của chín hành tinh liên quan đến mặt trời, số lượng cá hoặc gà. Chúng ta sẽ lại sử dụng ký hiệu X để nói lên biểu diễn của hệ thống, đồng thời nhớ rằng có một khác biệt căn bản giữa một biểu diễn của mô hình và trạng thái Đúng - nếu một thứ như vậy tồn tại. Không rõ những khái niệm này có quan hệ với nhau như thế nào. Như chúng ta sẽ thấy ở Chương 11, một số triết gia đã lập luận rằng việc khám phá hỗn độn cho thấy thế giới thực hẳn phải có những tính chất toán học đặc biệt. Các triết gia khác, đôi khi có lẽ cũng chính những người ấy, đã lập luận rằng việc khám phá hỗn độn ngụ ý toán học không mô tả thế giới.

Trong bất kỳ sự kiện nào, chúng ta không bao giờ tiếp cận được trạng thái Đúng của một hệ thống vật lý nếu cái đó có tồn tại. Thứ chúng ta có là những quan sát, được gọi là "S" để phân biệt với biểu diễn của hệ thống, X. Đâu là sự khác biệt giữa S và X? Chính là ***nhiễu*** [noise]. Nhiễu là chất keo gắn kết những nhà thực nghiệm chủ nghĩa với những nhà lý thuyết chủ nghĩa. Nhiễu cũng là chất bôi trơn cho phép các lý thuyết dễ dàng trượt về phía những thực tế rối loạn.

Trong hoàn cảnh vui vẻ, khi chúng ta biết mô hình toán học đã tạo ra các quan sát, cũng như biết một ***mô hình nhiễu*** [noise model] cho bất cứ thứ gì tạo ra bất cứ nhiễu nào có đó, như thế gọi là chúng ta ở trong ***Kịch bản mô hình hoàn hảo*** [Perfect Model Scenario], hay PMS. Điều hữu ích là phân biệt một trường hợp PMS mạnh, khi biết chính xác các giá trị tham số, với một trường hợp PMS yếu, khi chỉ biết những mẫu biểu toán học, còn giá trị tham số phải được ước lượng từ các quan sát. Chừng nào còn ở một trong hai trường hợp PMS nói trên, nhiễu được định nghĩa là khoảng cách giữa S và X, và chúng ta có thể nói về nhiễu như thứ gây ra tính không chắc chắn trong biểu diễn. Đó là vì chúng ta biết rằng một trạng thái Đúng có tồn tại dù không biết giá trị của nó. Còn khi rời xa PMS, những chi tiết trên không còn đúng bao nhiêu. Thậm chí ngay trong PMS, nhiễu cũng có vai trò mới một khi chúng ta thừa nhận rằng thế giới thực không phải là tuyến tính.

Vậy còn những khái niệm "tất định" và "ngẫu nhiên", hay thậm chí "có tính chu kỳ"? Chúng đề cập tới những thuộc tính trong các mô hình. Cách duy nhất để áp dụng chúng cho thế giới thực là thông qua mô hình tốt nhất (của hôm nay). Thật sự có những hệ thống động lực vật lý ngẫu nhiên không? Bất chấp ứng dụng hàng ngày của việc tung đồng xu hay con xúc xắc để tạo ra "sự ngẫu nhiên", câu trả lời điển hình trong vật lý học cổ điển là: không, không hề có sự ngẫu nhiên. Với một tập hợp đầy đủ các quy luật, có thể (hoặc có lẽ không) quá khó để tính được kết quả của việc tung đồng xu, gieo xúc xắc hay quay roulette, nhưng đó chỉ là vấn đề trong thực tiễn, không phải một vấn đề về nguyên tắc: con quỷ của Laplace sẽ không gặp khó khăn với những dự báo như vậy. Tuy nhiên, cơ học lượng tử thì khác. Trong lý thuyết cơ học lượng tử truyền thống, chu kỳ nửa phân rã của một nguyên tử uranium cũng là một con số tự nhiên và thật như khối lượng của nguyên tử uraium. Việc tung đồng xu hay quay roulette cổ điển không được lấy làm mô hình tốt nhất cho ngẫu nhiên, nhưng nếu căn cứ trên tuyên bố cơ học lượng tử về ngẫu nhiên và xác suất khách quan thì việc đó không liên quan. Những tuyên bố về - hoặc phủ nhận - sự tồn tại của xác suất khách quan đòi hỏi diễn giải các hệ thống vật lý dựa trên những mô hình của chúng ta về các hệ thống ấy. Luôn là thế. Một lý thuyết nào đó trong tương lai có thể rút ngẫu nhiên ra để nhường chỗ cho tất định, nhưng chúng ta chỉ có mặt trong một khoảng thời gian nhỏ đến mức gần như không tồn tại. Nên điều khá chắc chắn là trong lúc các bạn đọc những dòng này, một số những mô hình tốt nhất của chúng ta về thực tại sẽ vẫn thu nhận các yếu tố ngẫu nhiên.

Quan sát và nhiễu

Trong vòng vài thập kỷ qua, một số lượng lớn các công trình khoa học đã được viết về vấn đề sử dụng một chuỗi thời gian để phân biệt các hệ thống tất định với các hệ thống ngẫu nhiên. Khởi đầu của sự dồn dập ấy là trong các công trình vật lý học, sau đó lan sang địa vật lý, kinh tế học, y học, xã hội học và nhiều ngành khác. Hầu hết các công trình này được truyền cảm hứng bởi một định lý đẹp đẽ do nhà toán học Floris Takens (1940 - 2010) người Hà Lan chứng minh năm 1983, và chúng ta sẽ trở lại với định lý này ở Chương 8. Tại sao tất cả những công trình này được viết ra trong khi chúng ta có một quy tắc đơn giản để xác định một hệ thống toán học là tất định hay ngẫu nhiên? Sao không nhìn vào các quy tắc của hệ thống, xem nó có đòi hỏi một bộ sinh số ngẫu nhiên không?

Người ta thường lẫn lộn những trò chơi có điều kiện ràng buộc của các nhà toán học với công trình của các nhà khoa học tự nhiên (và các nhà khoa học khác).

Các nhà toán học thực thụ thích chơi những trò chơi trí tuệ, như giả vờ quên các quy tắc, rồi đoán xem hệ thống là tất định hay ngẫu nhiên bằng cách chỉ nhìn vào chuỗi thời gian của các biểu diễn của hệ thống. Liệu họ có thể nhận dạng rõ ràng bất kỳ hệ thống tất định nào dựa vào chuỗi thời gian từ quá khứ xa vô tận đến tương lai xa vô tận không? Với những điểm cố định hay thậm chí những vòng lặp theo chu kỳ, trò chơi này không đủ thách thức; để khiến nó thú vị hơn, hãy xét một biến thể, trong đó chúng ta không biết các biểu diễn chính xác, mà chỉ tiếp cận được các quan sát có nhiễu, S, của từng biểu diễn X. Nguồn gốc S thường được xem - dù rằng hơi sai lầm - là có liên quan đến việc đưa thêm một số ngẫu nhiên vào mỗi giá trị đúng của X. Trong trường hợp đó, *nhiễu quan sát* [observational noise] không ảnh hưởng đến những biểu diễn tương lai của hệ thống, mà chỉ đến những quan sát của chúng ta về mỗi biểu diễn. Đây là một vai trò rất khác với vai trò của những số tự nhiên R trong các hệ thống ngẫu nhiên, chẳng hạn Ánh xạ Yule, trong đó giá trị của R quả thực tác động đến tương lai vì nó làm thay đổi giá trị tiếp theo của X. Để duy trì sự phân biệt này, những tác động ngẫu nhiên có ảnh hưởng đến X được gọi là *nhiễu động lực* [dynamical noise].

Như đã nói ở trên, các nhà toán học có thể tìm hiểu bên trong Kịch bản mô hình hoàn hảo (PMS). Khởi đầu, họ biết rằng mô hình tạo ra chuỗi thời gian có một kiểu cấu trúc nhất định. Đôi lúc họ tự cho là biết cấu trúc (PMS yếu), đôi lúc thậm chí biết giá trị của tham số (PMS mạnh). Họ tạo ra một chuỗi thời gian của X, và từ đây tạo ra một chuỗi thời gian của S. Sau đó, họ giả vờ như quên mất các giá trị của X và xét xem có thể tìm ra chúng không, hoặc họ giả vờ như quên mất hệ thống toán học và xét xem nếu chỉ có S, liệu họ có thể nhận dạng hệ thống cùng những giá trị tham số của nó, hoặc xác định xem hệ thống là ngẫu nhiên, hoặc dự báo giá trị tiếp theo của X.

Đến đây, dễ thấy trò chơi của họ đang đi đâu: các nhà toán học đang cố gắng mô phỏng tình huống mà các nhà khoa học tự nhiên không bao giờ có thể thoát khỏi. Các nhà vật lý học, khoa học trái đất, kinh tế học và các nhà khoa học khác *không* biết quy tắc, tức toàn bộ Quy luật của Tự nhiên liên quan đến các hệ thống của nghiên cứu khoa học tự nhiên. Và những quan sát khoa học là không hoàn hảo; do nhiễu quan sát, chúng có thể luôn luôn không chắc chắn, nhưng đó chưa phải là hết chuyện. Sẽ là một sai lầm chết người khi lẫn lộn những quan sát thực tế với những quan sát của các trò chơi toán học này.

Nhà khoa học tự nhiên bị buộc chơi một trò chơi khác. Trong khi cố gắng trả lời cùng các câu hỏi, nhà khoa học chỉ được trao cho một chuỗi thời gian của quan sát, S, một số thông tin liên quan đến thống kê về nhiễu quan sát, và *hy vọng* rằng có tồn tại một ánh xạ toán học nào đó. Các nhà vật lý học không bao giờ dám chắc một cấu trúc như vậy có tồn tại hay không; thậm chí họ không bao giờ dám chắc liệu biến số biểu diễn X của mô hình có bất kỳ ý nghĩa vật lý nào không. Nếu X là số thỏ trong một khu vườn có thật, khó mà tưởng tượng rằng X không tồn tại - nó chỉ là một số nguyên nào đó. Nhưng còn những biến số mô hình như tốc độ gió hay nhiệt độ? Liệu có những số thực tương ứng với các phần tử của vector biểu diễn không? Và nếu không, sự tương ứng sụp đổ ở đâu giữa thỏ và tốc độ gió?

Triết gia rất quan tâm tới những câu hỏi như vậy, và tất cả chúng ta đều nên như thế. LeVerrier, người Pháp từng làm việc với Fitzroy để thiết lập hệ thống báo trước thời tiết đầu tiên, đã trở nên nổi tiếng vì phát hiện hai hành tinh. Ông sử dụng các định luật của Newton để dự báo vị trí của sao Hải vương dựa trên "những bất thường" trong chuỗi thời gian quan sát được từ quỹ đạo của sao Thiên vương, và hành tinh ấy đã được quan sát đúng lúc. Ông cũng phân tích “những bất thường” trong quỹ đạo của sao Thủy, và một lần nữa đã cho các nhà quan sát biết cần đi tìm một hành tinh mới khác ở đâu. Họ đã tìm được: hành tinh mới, được đặt tên là Vulcan (Thần lửa), ở rất gần mặt trời và khó thấy, nhưng đã được quan sát hàng thập kỷ. Giờ đây, chúng ta biết rằng không có hành tinh Vulcan. LeVerrier đã sai vì quỹ đạo của sao Thủy không được mô tả tốt bởi các định luật của Newton (dù nay nó được mô tả tốt hơn khá nhiều bởi các định luật của Einstein). Đã bao lần chúng ta đổ lỗi cho sự không tương thích giữa những mô hình của chúng ta và dữ liệu về nhiễu, trong khi nguyên nhân gốc rễ là sự yếu kém của mô hình? Dù các nhà khoa học thừa nhận hay không, hầu hết những nghiên cứu khoa học thực sự thú vị được thực hiện ở các vùng giới hạn năng lực (đường rìa). Chúng ta không bao giờ chắc chắn liệu các quy luật thời nay có áp dụng ở đó hay không. Khoa học khí quyển thời nay là một ví dụ tốt về những nỗ lực miệt mài được thực hiện ở vùng giới hạn hiểu biết của con người.

Nghiên cứu về hỗn độn đã làm sáng tỏ tầm quan trọng của việc phân biệt hai vấn đề khác nhau: một là tác động của tính không chắc chắn trong trạng thái biểu diễn hoặc tham số; một là sự yếu kém của bản thân toán học. Các nhà toán học khi nghiên cứu bên trong PMS có thể tiến bộ bằng cách giả vờ như họ không tiến bộ, còn những nhà khoa học giả vờ - hoặc tin rằng - họ đang nghiên cứu bên trong PMS trong khi thực tế không phải vậy có thể gây ra sự phá hoại, nhất là nếu mô hình của họ được chấp nhận một cách ngây thơ để làm cơ sở cho sự ra quyết định. Thực tế đơn giản là, chúng ta không thể áp dụng những chuẩn mực của chứng minh toán học cho các hệ thống vật lý, mà chỉ áp dụng được cho những mô hình toán học về các hệ thống vật lý. Không thể chứng minh rằng một hệ thống vật lý là hỗn độn, hay chứng minh rằng nó có tính chu kỳ. Nhà vật lý học và nhà toán học không được quên rằng đôi khi họ sử dụng cùng các từ để nói lên những thứ khác nhau. Khi làm vậy, họ thường rơi vào một số khó khăn và sự gay gắt đáng kể. Đề từ của Mach ở đầu mục nói lên rằng đây không phải một vấn đề mới.

4

Hỗn độn trong các mô hình toán học

> Mọi thứ sẽ tốt đẹp hơn nếu có thêm nhiều người nhận ra rằng những hệ thống phi tuyến đơn giản không nhất thiết sở hữu những tính chất động lực học đơn giản.
>
> Lord May (1976)*

Chương này trình bày một khảo sát rất ngắn về những mô hình toán học hỗn độn, từ động vật học đến thiên văn học. Như bất kỳ cuộc xâm lược văn hóa nào, sự xuất hiện của những mô hình tất định phi tuyến với độ phụ thuộc nhạy có khi được chào đón, có khi không. Nó đã được chào

* Robert May (sinh năm 1938), nhà khoa học Australia thuộc lĩnh vực sinh thái học lý thuyết.

đón đồng đều nhất trong vật lý học, lĩnh vực mà như chúng ta sẽ thấy, đã có những kiểm chứng thực nghiệm đáng kinh ngạc cho các tiên đoán của nó. Trong những lĩnh vực khác, bao gồm cả sinh học quần thể, sự liên quan của hỗn độn vẫn còn bị chất vấn. Nhưng chính các nhà sinh học quần thể lại là những người đã đề xướng một số mô hình hỗn độn đầu tiên, từ một thập kỷ trước khi những mô hình của các nhà thiên văn học và khí tượng học xuất hiện. Sự phục hồi quan tâm đến lĩnh vực này đã được thúc đẩy bởi một bài phê bình có ảnh hưởng và dễ tiếp cận trên tạp chí *Nature*. Chúng ta bắt đầu với những nhận thức căn bản được đề cập trong bài báo đó.

Những con rệp được yêu mến của tháng Năm

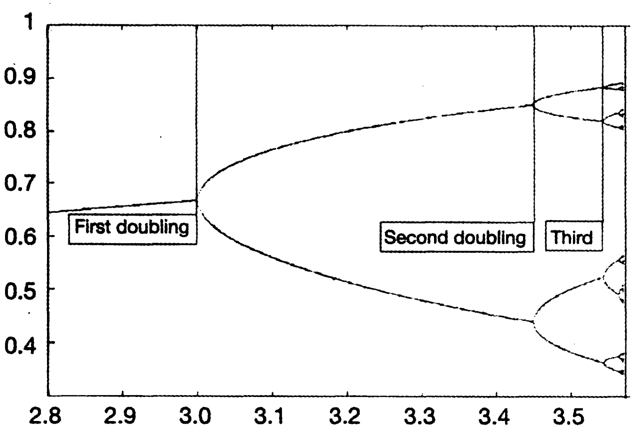
Năm 1976, Lord May công bố trên tạp chí *Nature* một bài phê bình thu hút nhiều chú ý của công chúng về động lực học hỗn độn. Bài viết khảo sát những đặc điểm chính của các hệ thống phi tuyến tất định. Nhận thấy nhiều câu hỏi thú vị vẫn chưa được giải đáp, ông lập luận rằng tầm nhìn mới này không chỉ cung cấp giá trị lý thuyết mà cả giá trị thực tiễn và giáo dục, và nó đề xuất đủ thứ, từ những ẩn dụ mới để mô tả các hệ thống, đến những đại lượng mới để quan sát và những giá trị tham số mới để ước tính. Một số động lực quần thể đơn giản nhất là động lực của những quần thể sinh sản khi thế hệ này không trùng lắp với thế hệ kế tiếp. Thí dụ, những loại côn trùng có một thế hệ mỗi năm có thể được mô tả bởi những ánh xạ thời gian rời rạc. Trong trường hợp này, X_i biểu diễn quần thể hoặc mật độ quần thể trong năm thứ i, nên chuỗi thời gian của chúng ta sẽ có một giá trị mỗi năm, và ánh xạ là quy tắc xác định quy mô của quần thể năm tới khi biết quần thể năm nay. Một tham số α biểu diễn mật độ tài nguyên. Trong những năm 1950, Moran và Ricker đã độc lập đề xướng ánh xạ được biểu diễn trong hình 8(f). Nhìn vào đồ thị đó, chúng ta thấy khi giá trị hiện thời của X là nhỏ, giá trị tiếp theo của X sẽ lớn hơn: nói cách khác, các quần thể nhỏ tăng lên. Nhưng nếu X trở nên quá lớn, giá trị tiếp theo của X sẽ nhỏ, và khi giá trị hiện thời rất lớn, giá trị tiếp theo sẽ rất nhỏ: các quần thể lớn làm kiệt quệ tài nguyên cho mỗi cá nhân, nên sự tái sinh sản thành công bị giảm xuống.

Những quần thể dao động thất thường đã được quan sát từ lâu, và các nhà nghiên cứu lâu nay đã tranh cãi về nguồn gốc của chúng. Chuỗi thời gian của linh miêu Canada, chuột đồng Scandinavia và chuột đồng Nhật Bản, cũng như chuỗi thời gian của vết đen mặt trời là một số tập dữ liệu được phân tích nhiều nhất trong thống kê. Ý tưởng những mô hình phi tuyến rất đơn giản có thể hiển thị những dao động thất thường đã gợi ra một cơ chế tiềm năng mới cho những dao động quần thể trong thực tế, một cơ chế mâu thuẫn với quan điểm cho rằng các quần thể "tự nhiên" nên duy trì một mức độ ổn định hoặc một chu kỳ tuần hoàn đều đặn. Có tư tưởng cho rằng những dao động *trông có vẻ* ngẫu nhiên này không nhất thiết bị gây ra bởi một lực bên ngoài nào đó như thời tiết chẳng hạn, mà có thể là nội tại trong động lực học quần thể tự nhiên - đây là một tư tưởng có tiềm năng thay đổi hoàn toàn những nỗ lực tìm hiểu và quản lý quần thể. Mặc dù nhận thấy "việc thay thế những tương tác của một quần thể với môi trường sinh học và vật lý của nó bằng những tham số thụ động có thể rất trái ngược với thực tế", May vẫn đưa ra một khảo sát về những hành vi thú vị trong Ánh xạ logistic. Bài báo kết thúc với "lời biện hộ kiểu Phúc âm cho việc giới thiệu những phương trình vi phân vào các khóa toán học sơ cấp", để trực giác của sinh viên được phong phú thêm khi thấy những điều lớn lao mà các phương trình phi tuyến đơn giản có thể làm được". Đó là ba thập kỷ trước.

Chúng ta sẽ xem xét một số thứ lớn lao này dưới đây, nhưng lưu ý sự tập trung của các nhà toán học vào Ánh xạ logistic không nhằm ngụ ý theo bất kỳ ý nghĩa nào rằng ánh xạ này "chi phối" các hệ thống vật lý và sinh học khác nhau. Một điểm phân biệt động lực học phi tuyến với phân tích truyền thống là, cái thứ nhất có xu hướng tập trung nhiều hơn vào động thái của các hệ thống thay vì vào những chi tiết của bất kỳ biểu diễn ban đầu nào theo những phương trình cụ thể với các giá trị tham số định sẵn: đây là một sự tập trung vào hình học hơn là thống kê. Những động lực tương tự nhau có thể quan trọng hơn những thống kê "tốt". Và hóa ra, Ánh xạ logistic và Ánh xạ Moran-Ricker rất giống nhau theo cách này, dù trông chúng rất khác trong hình 8(f). Dĩ nhiên, chi tiết cũng có thể quan trọng; vai trò lâu dài của Ánh xạ logistic có thể là vai trò giáo dục, giúp xua tan niềm tin lịch sử rằng động lực học phức tạp đòi hỏi những mô hình rất phức tạp hoặc sự ngẫu nhiên.

Tính phổ quát: đoán trước lộ trình tới hỗn độn

Ánh xạ logistic sinh ra vô số những động thái phong phú đáng ngạc nhiên. Sơ đồ phân nhánh nổi tiếng ở hình 11 tổng kết động thái của ánh xạ tại nhiều giá trị tham số khác nhau trong cùng một hình. Trục ngang là α, các điểm ở bất kỳ mặt cắt đứng nào là những biểu diễn rơi gần điểm thu hút ứng với giá trị đó của α. Ở đây, α phản ánh một tham số nào đó của hệ thống: X là số cá trong hồ thì α là lượng thức ăn trong hồ; X là thời gian giữa các giọt ở vòi nước thì α là tốc độ nước rỉ qua vòi; X là vận động của các trục trong sự đối lưu chất lỏng thì α là nhiệt được chuyển tới đáy bể. Trong những mô hình của nhiều thứ rất khác nhau, động thái vẫn tương tự. Với α nhỏ (ở phía trái) chúng ta có một điểm thu hút là điểm cố định. Vị trí của điểm cố định tăng khi α tăng, cho đến khi α đạt giá trị bằng 1, tại đó điểm cố định biến mất và chúng ta quan sát các bước lặp luân phiên giữa hai điểm: đây là một vòng lặp chu kỳ hai. Khi α tiếp tục tăng, chúng ta có một vòng lặp chu kỳ bốn, rồi chu kỳ tám, chu kỳ 16,



Hình 11. Nhân đôi chu kỳ trong Ánh xạ logistic khi α tăng từ 2,8 đến khoảng 3,5; ba trường hợp nhân đôi đầu tiên được đánh dấu.

chu kỳ 32. Và cứ vậy tiếp diễn. Chia đôi hết lần này tới lần khác.

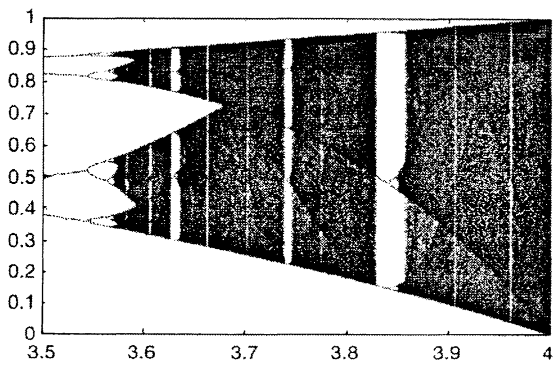
Chu kỳ của vòng lặp luôn tăng theo hệ số bằng 2, nên chúng được gọi là *những phân nhánh nhân đôi chu kỳ* [period doubling bifurcation]. Các vòng lặp cũ tuy không còn được thấy, nhưng không phải chúng ngừng tồn tại. Chúng vẫn ở đó, chỉ là đã trở nên bất ổn định. Đây là điều xảy ra cho gốc trong Ánh xạ logistic khi α lớn hơn một: X chỉ ở tại 0 nếu nó đúng bằng 0, còn những giá trị khác 0 sẽ tăng theo mỗi lần lặp. Tương tự, những điểm gần một vòng lặp không ổn định theo chu kỳ sẽ di chuyển xa khỏi nó, do vậy chúng ta không còn thấy chúng một cách rõ ràng khi lặp ánh xạ.

Có một sự đều đặn ẩn trong hình 11. Lấy ba giá trị liên tiếp bất kỳ của α tại đó chu kỳ nhân đôi, lấy giá trị thứ hai trừ giá trị thứ nhất, lấy kết quả chia cho hiệu số giữa giá trị thứ ba và thứ hai. Kết quả dẫn tới số Feigenbaum, xấp xỉ 4,6692016091. Bằng một máy tính xách tay, Mitch Feigenbaum* đã phát hiện mối quan hệ này ở Los Alamos cuối những năm 1970, và giờ đây, tỉ lệ này được gọi theo tên ông. Những người khác cũng đã khám phá nó một cách độc lập;

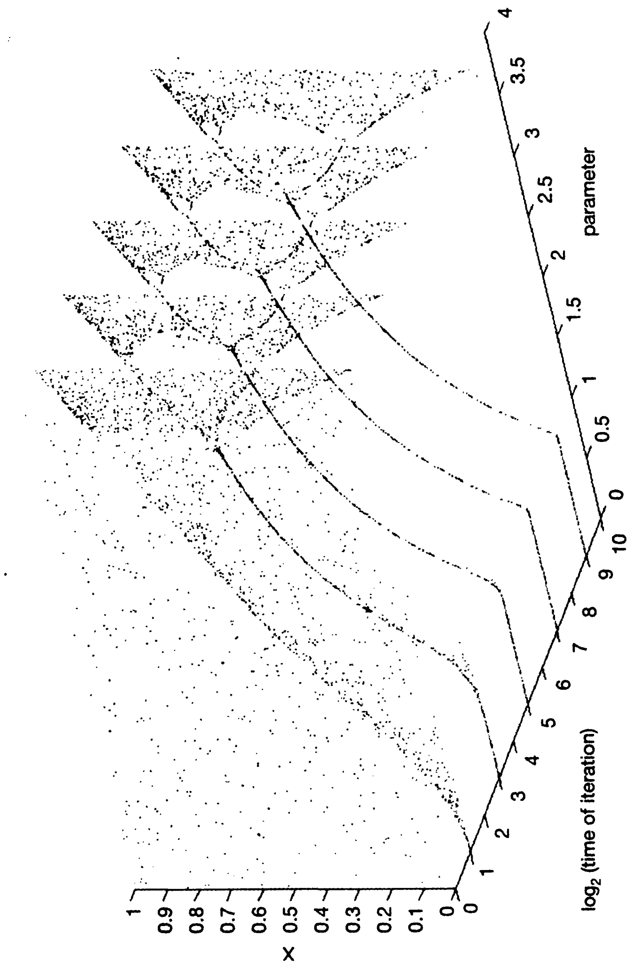
* Mitchell Feigenbaum (sinh năm 1944), nhà vật lý toán học Mỹ.

trong mỗi trường hợp, sự sáng tỏ dẫn tới tính toán ấy cũng rất ấn tượng.

Do số Feigenbaum lớn hơn 1 nên những giá trị của α tại đó sự phân nhánh xuất hiện trở nên ngày càng gần nhau hơn, và chúng ta có một số lượng vô hạn các phân nhánh trước khi đạt tới một giá trị α gần 3,5699456718. Hình 12 cho thấy điều xảy ra với những giá trị lớn hơn của α. Tất cả các điểm này phần lớn là hỗn độn. Nhưng hãy để ý những cửa sổ thể hiện động thái theo chu kỳ, chẳng hạn cửa sổ chu kỳ ba, nơi α có giá trị bằng 1 trừ căn bậc hai của 8 (tức khoảng 3,828). Đây là một vòng lặp chu kỳ ba ổn định; bạn có nhận dạng được các cửa sổ ứng với chu kỳ năm không? Chu kỳ bảy?



Hình 12. Một loạt động thái khác nhau trong Ánh xạ logistic khi α tăng từ một vòng lặp chu kỳ bốn tại α = 3,5 đến trạng thái hỗn độn tại α = 4. Hãy để ý các đợt nhân đôi chu kỳ được lặp lại ở phần bên phải của mỗi cửa sổ theo chu kỳ.



Hình 13. Sơ đồ ba chiều, cho thấy các giá trị X_0 và α ngẫu nhiên ban đầu ở phía trái đằng sau của hộp co rút và ngả về phía những điểm thu hút của chúng khi số lần lặp tăng lên. Lưu ý sự tương tự của các điểm gần phía phải đằng trước với các điểm ở hình 11 và 12.

Hình 13 đặt những hình ảnh của Ánh xạ logistic vào ngữ cảnh rõ hơn. Những giá trị được chọn ngẫu nhiên cho α và X_0 tạo thành một đám mây các điểm ở phần cắt lớp ứng với t = 0 trong hình ba chiều. Khi Ánh xạ logistic được lặp tới, phần nhất thời rơi đi, các điểm hấp dẫn ở mỗi giá trị của α dần dần xuất hiện, nên sau 512 lần lặp, phần cắt lớp ứng với lần cuối cùng sẽ giống như hình 12.

Sẽ là đòi hỏi quá nhiều khi kỳ vọng một thứ đơn giản như Ánh xạ logistic nói cho chúng ta điều gì đó về động thái của heli lỏng. Nhưng quả thực nó làm được điều ấy. Không những động thái phức tạp cho thấy một dấu hiệu định tính về sự nhân đôi chu kỳ, mà các giá trị định lượng thực tế của số Feigenbaum được tính từ nhiều thí nghiệm cũng đồng thuận khác thường với những gì được tính toán từ Ánh xạ logistic. Nhiều hệ thống vật lý có vẻ biểu hiện "lộ trình nhân đôi chu kỳ đi tới hỗn độn" này, như thủy động lực học (nước, thủy ngân, heli lỏng), tia laser, điện tử (diode, bóng bán dẫn) và phản ứng hóa học (phản ứng Belousov-Zhabotinsky). Trong các thí nghiệm, thường người ta có thể ước tính số Feigenbaum chính xác đến hai chữ số. Đây là một trong những kết quả đáng kinh ngạc nhất được thông báo ở đây: Làm thế nào mà những tính toán đơn giản với Ánh xạ logistic có thể cho chúng ta một thông tin liên quan đến tất cả những hệ thống vật lý này?

Sự say mê của các nhà toán học với đồ thị trên không chỉ nảy sinh từ vẻ đẹp của nó, mà còn từ thực tế rằng chúng ta sẽ thu được bức tranh tương tự đối với Ánh xạ Moran-Ricker và nhiều hệ thống khác mà thoạt nhìn tưởng như hoàn toàn khác với Ánh xạ logistic. Một lập luận chuyên môn cho thấy sự nhân đôi chu kỳ là điều thường gặp ở những ánh xạ "một bướu", với cái bướu *trông giống như* một đường parabola. Ở một ý nghĩa rất thật và xác đáng, hầu như mọi ánh xạ phi tuyến đều trông giống như vậy, rất gần với giá trị tối đa của chúng, nên những thuộc tính như nhân đôi chu kỳ được gọi là "phổ quát", dù không phải *mọi* ánh xạ đều có. Điều còn ấn tượng hơn những thực tế toán học này là thực tế thực nghiệm rằng rất nhiều hệ thống vật lý thể hiện một động thái bất ngờ, có thể thấy là phản ánh cấu trúc toán học này. Đó có phải là một lập luận mạnh mẽ cho thấy toán học chi phối chứ không đơn thuần mô tả Tự nhiên? Để trả lời câu hỏi, hãy xét xem số Feigenbaum hơi giống hơn với một hằng số của hình học như ϖ (pi), hay một hằng số vật lý như tốc độ ánh sáng, c. Chúng ta có thể mô tả một cách hoàn hảo tính chất hình học của hình đĩa, hình hộp hay hình cầu bằng cách sử dụng ϖ, nhưng rất khó để ϖ chi phối mối quan hệ giữa những độ dài, diện tích và thể tích thực tế giống như những giá trị của các hằng số vật lý chi phối bản chất mọi sự bên trong những quy luật tự nhiên của chúng ta.

Nguồn gốc của thuật ngữ "hỗn độn" trong toán học

Năm 1964, nhà toán học A. N. Sharkovski đã chứng minh một định lý đáng chú ý về những động thái của nhiều ánh xạ "một bướu": cụ thể, việc khám phá một vòng lặp theo chu kỳ cho thấy có tồn tại những vòng lặp theo chu kỳ khác, thậm chí rất nhiều. Phát hiện thấy một vòng lặp chu kỳ 16 tồn tại ở một giá trị tham số cụ thể có nghĩa là có những vòng lặp chu kỳ tám, chu kỳ bốn, chu kỳ hai và chu kỳ một ở giá trị đó. Tìm ra một vòng lặp chu kỳ ba có nghĩa là có một vòng lặp của mọi chu kỳ có thể có! Đây là một chứng minh không kiến tạo khác, vì nó không cho chúng ta biết những vòng lặp ấy ở đâu, dẫu vậy nó vẫn là một kết quả khá gọn ghẽ. Mười một năm sau Sharkovski, Li và Yorke* đã công bố một công trình có ảnh hưởng lớn của họ với tiêu đề rất hay "Chu kỳ ba ám chỉ hỗn độn". Cái tên "hỗn độn" gắn chặt với toán học từ đó.

---

* - Alexander N. Sharkovski (sinh năm 1936), nhà toán học Nga.
- Li Tien - Yen (sinh năm 1945), nhà toán học Mỹ.
- James A.Yorke (sinh năm 1941), nhà vật lý và toán học Mỹ.

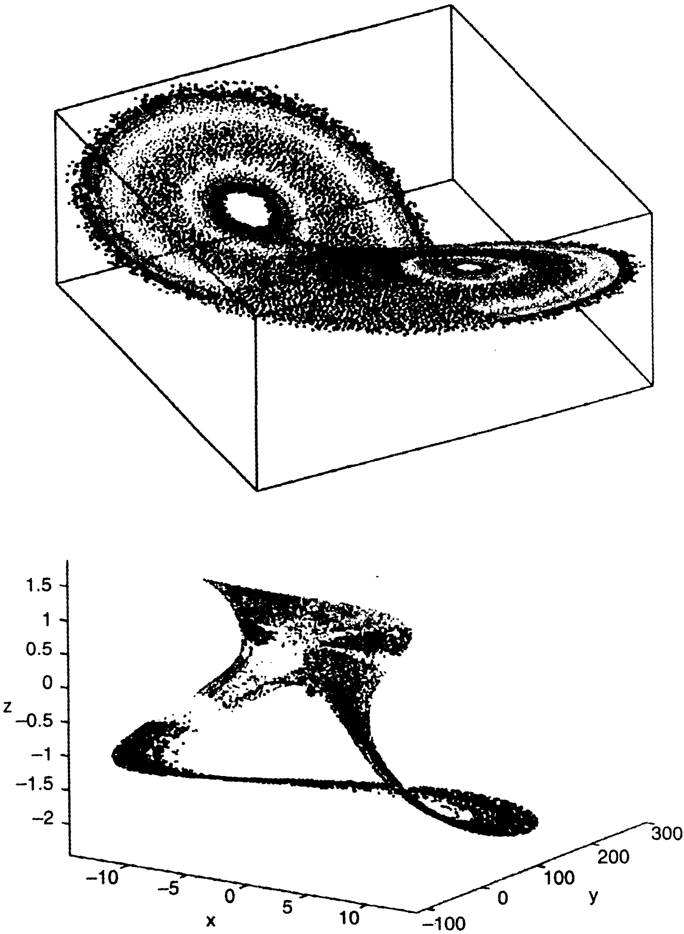
Những hệ thống toán học có số chiều cao hơn

Hầu hết các biểu diễn mô hình của chúng ta cho tới giờ chỉ gồm một phần tử. Mô hình chuột đồng và chồn là một ngoại lệ, vì biểu diễn bao gồm hai số: một phản ánh quần thể chuột đồng, một phản ánh quần thể chồn. Trong trường hợp này, biểu diễn là một vector. Các nhà toán học gọi số lượng phần tử trong biểu diễn là *số chiều* [dimension] của hệ thống, vì việc trình bày các vector biểu diễn sẽ đòi hỏi một không gian biểu diễn với số chiều đó.

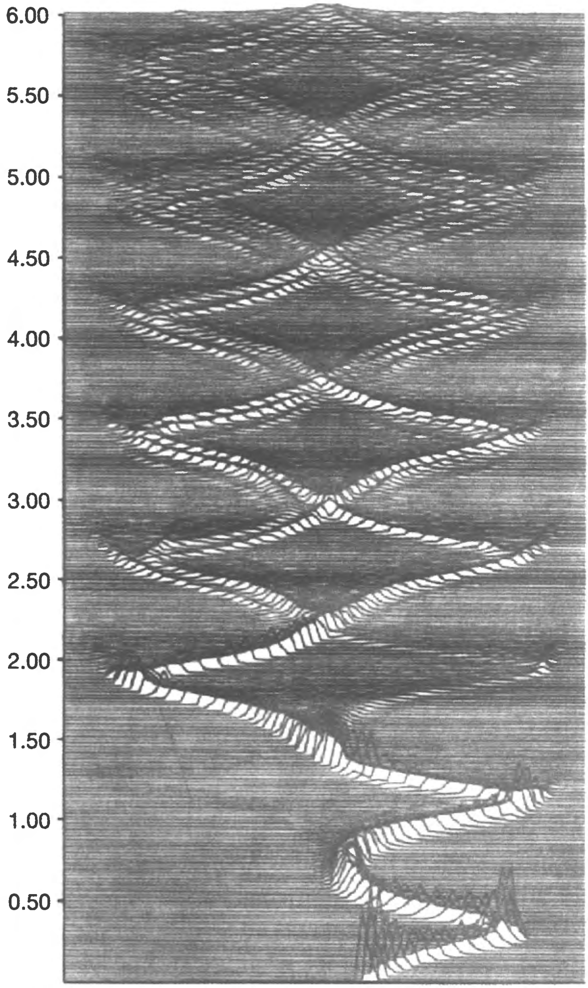
Khi chúng ta chuyển sang số chiều cao hơn, các hệ thống thường không phải là ánh xạ mà là các ***dòng*** [flow]. Một ánh xạ là một hàm số lấy một giá trị của X và đưa kết quả là giá trị tiếp theo của X, trong khi đó một dòng đưa ra vận tốc của X cho bất kỳ điểm nào trong không gian biểu diễn. Hãy nghĩ tới một củ cải trôi nổi dưới bề mặt nước biển. Đường đi ba chiều của củ cải trong biển tương tự như đường đi của X trong không gian biểu diễn, và cả hai đôi lúc được gọi là các *đạn đạo* hay *quỹ đạo* [trajectory]. Nếu thay vì một củ cải, chúng ta bám theo đường đi của một lượng cực nhỏ trong chất lỏng thì thường thấy những đường đi này lặp lại và có sự phụ thuộc nhạy. Những phương trình là tất định và những lượng nhỏ chất lỏng này được gọi là thể hiện "sự hỗn độn Lagrange". Những kiểm chứng trong phòng thí nghiệm với các loại chất lỏng thường cho thấy các đồ thị đẹp đẽ, phản ánh động lực học hỗn độn quan sát được trong những mô hình về dòng chất lỏng. Không cần khảo sát những phương trình vi phân định nghĩa các trường vận tốc này, trong phần tiếp theo chúng ta sẽ đề cập đến nhiều hệ thống hỗn độn khác nhau.

Hỗn độn tán xạ

Năm 1963, Ed Lorenz công bố một công trình sau trở thành kinh điển về tính dự đoán được của các hệ thống hỗn độn. Ông xét một tập hợp ba phương trình hết sức đơn giản dựa trên động lực của một dòng chảy gần khởi đầu của một đối lưu, ngày nay được gọi là *Hệ Lorenz* [Lorenz system]. Có thể hình dung ba phần tử của biểu diễn như các trục đối lưu trong một lớp chất lỏng giữa hai đĩa phẳng khi đĩa dưới được làm nóng. Khi không có đối lưu, chất lỏng không vận động và nhiệt độ trong chất lỏng giảm đều từ đĩa ấm hơn ở đáy tới đĩa mát hơn ở đỉnh. Biểu diễn X của mô hình Lorenz gồm ba giá trị {x,y,z}, trong đó x phản ánh tốc độ của chất lỏng luân phiên, y lượng hóa sự chênh lệch nhiệt độ giữa chất lỏng đi lên và chất lỏng chìm xuống, còn z đo lường độ lệch so với biên dạng nhiệt độ tuyến tính [linear



Hình 14. Đồ thị ba chiều của điểm thu hút Lorenz (trên) và điểm thu hút Moore-Spiegel (dưới). Sắc thái đen khác nhau nói lên những thay đổi về thời gian nhân đôi tính không chắc chắn ở mỗi điểm.



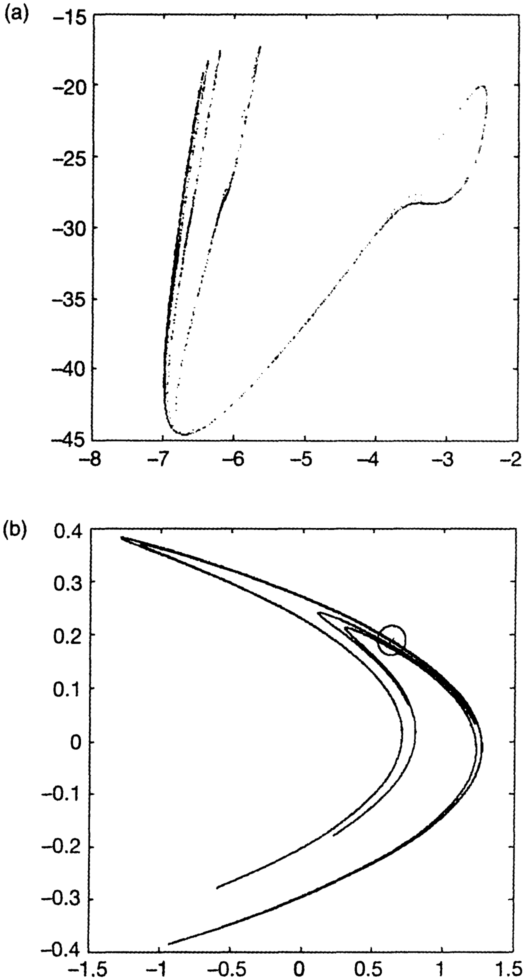
Hình 15. Dự báo xác suất mà con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta sẽ đưa ra cho hệ Lorenz năm 1963. Hãy đối chiếu diễn tiến của tính không chắc chắn trong hệ thống hỗn độn này với đồ thị tăng khá đơn giản của tính không chắc chắn theo Ánh xạ Yule ở hình 10.

temperature profile]. Một điểm hấp dẫn từ hệ thống này được trình bày ở hình 14; tình cờ trông nó như một con bướm. Sắc thái đen khác nhau trên điểm hấp dẫn nói lên những khác biệt về thời gian cần có để một mức không chắc chắn cực nhỏ trở nên gấp đôi. Trong chương 6, chúng ta trở lại bàn về ý nghĩa của những sắc thái này, nhưng hãy lưu ý những thay đổi theo vị trí.

Diễn tiến của tính không chắc chắn trong hệ Lorenz được trình bày ở hình 15. Hình này trông phức tạp hơn một chút so với đồ thị tương ứng của Ánh xạ Yule ở hình 10. Hình 15 cho thấy con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta có thể đưa ra kiểu dự báo nào cho hệ thống này: tính không chắc chắn nhỏ ban đầu ở đáy đã tăng rộng hơn, rồi hẹp hơn, rồi rộng hơn, rồi hẹp hơn... cuối cùng tách đôi và bắt đầu mờ dần. Nhưng tùy vào những quyết định mà chúng ta cố gắng đưa ra, có thể vẫn có thông tin hữu ích trong hình mẫu này kể cả ở thời điểm tại đỉnh của khung đồ thị. Tính không chắc chắn vẫn chưa trở nên ổn định vào thời điểm nó đạt đến đỉnh của đồ thị.

Năm 1965, hai nhà thiên văn học và toán học Dennis W. Moore và Edward A. Spiegel đã cân nhắc một mô hình đơn giản về một lượng khí gas nhỏ ở khí quyển của một ngôi sao. Không gian biểu diễn vẫn là ba chiều, và ba phần tử của X đơn giản là độ cao, vận tốc và gia tốc của nó. Động lực của lượng khí gas khá lý thú vì chúng ta có hai lực cạnh tranh với nhau: một nhiệt lực có xu hướng làm nó mất ổn định, và một từ lực có xu hướng đưa nó trở lại điểm khởi đầu, rất giống như một cái lò xo. Khi lượng khí gas đi lên, nó rơi vào một nhiệt độ khác với chất lỏng xung quanh, và điều này tác động trở lại vận tốc và nhiệt của nó, nhưng đồng thời từ trường của ngôi sao đóng vai trò như một cái lò xo để kéo lượng khí gas trở lại vị trí ban đầu. Sự vận động do hai lực đối kháng này gây ra thường dẫn tới sự hỗn độn. Điểm thu hút Moore-Spiegel cũng được trình bày ở hình 16.

Các thí nghiệm về hỗn độn luôn đẩy máy tính tới giới hạn của chúng, đôi khi hơi quá những giới hạn ấy. Những năm 1970, nhà thiên văn học Pháp Michel Hénon (1931 - 2013) muốn có một nghiên cứu chi tiết về các điểm hấp dẫn hỗn độn. Với một năng lực máy tính nhất định, sẽ có sự cân nhắc lựa chọn giữa độ phức tạp của hệ thống và độ dài chuỗi thời gian mà người ta có thể tính toán được. Hénon muốn một hệ thống với những tính chất tương tự như hệ thống năm 1963 của Lorenz, nhưng phải bớt chi phí hơn để có thể thực hiện lặp trên máy tính của ông. Đây là một hệ thống hai chiều, với biểu diễn X bao gồm cặp giá trị {x,y}. Ánh xạ Hénon được định nghĩa bởi quy tắc:



Hình 16. Đồ thị hai chiều của: (a) một lát cắt của điểm thu hút Moore-Spiegel tại z = 0; và (b) điểm thu hút Hénon với α bằng 1,4 và β bằng 0,3. Lưu ý cả hai trường hợp đều có cấu trúc tương tự với nhiều đường rẽ nhánh.

Giá trị mới của x_{i+1} bằng 1 trừ y_i, cộng với α nhân x_i^2; giá trị mới của y_{i+1} bằng β nhân x_i.

Đồ thị (b) của hình 16 trình bày điểm thu hút tại α bằng 1,4 và β bằng 0,3. Đồ thị (a) trình bày một lát cắt của điểm thu hút Moore-Spiegel bằng cách kết hợp những kết xuất nhanh của hệ thống mỗi khi z bằng zero và tăng lên. Kiểu hình dạng này được gọi là ***mặt cắt Poincaré*** [Poincaré section] và cho thấy những mặt cắt của một dòng rất giống với các ánh xạ ra sao.

Phương trình trễ, bệnh dịch và chẩn đoán y khoa

Một tập hợp mô hình lý thú khác là những phương trình trễ. Ở đây, cả biểu diễn hiện thời và một biểu diễn nào đó trong quá khứ ("trạng thái trễ") đóng một vai trò trực tiếp trong động lực học. Những mô hình này thường gặp ở các hệ thống sinh học, và có thể làm sáng tỏ những những căn bệnh dao động như ung thư bạch cầu. Trong việc cung cấp máu, số lượng tế bào có vào ngày mai tùy thuộc vào số lượng có ngày hôm nay, cũng như vào số lượng tế bào mới trưởng thành vào hôm nay; độ trễ phát sinh từ khoảng cách về thời gian giữa thời điểm những tế bào mới này được yêu cầu và thời điểm chúng trưởng thành: số lượng tế bào trưởng thành hôm nay phụ thuộc vào số lượng tế bào máu ở một thời điểm nào đó trong quá khứ. Có nhiều loại bệnh khác với kiểu động lực dao động này, và nghiên cứu về hỗn độn trong những phương trình trễ là vô cùng lý thú và hữu ích.

Chúng ta tạm thời ngừng bàn luận về các mô hình toán học để nhường chỗ cho lưu ý rằng nghiên cứu y khoa là một lĩnh vực khác, trong đó những nhận thức từ các mô hình toán học được triển khai ứng dụng trong các hệ thống thực tế. Nghiên cứu về phương trình trễ của Mike Mackey tại Đại học McGill và những người khác thậm chí đã dẫn tới một biện pháp cứu chữa cho ít nhất một căn bệnh dao động. Nghiên cứu về động lực phi tuyến cũng đã dẫn tới những nhận thức về sự tiến triển của các bệnh dao động trong một dân số, không phải trong một cá thể; những mô hình của chúng ta có thể được đối chiếu với thực tế trong nghiên cứu về bệnh sởi, trong đó người ta có thể cân nhắc động lực học theo thời gian và không gian sao cho hữu ích. Phân tích về chuỗi thời gian hỗn độn còn dẫn tới sự hình thành những biện pháp sáng suốt để đánh giá các chuỗi thời gian phức tạp trong y học, kể cả những chuỗi thời gian từ não (điện não đồ) và tim (điện tâm đồ). Như thế không phải nói rằng những hiện tượng y khoa này của thế giới thực là hỗn độn, hay thậm chí có thể được mô tả tốt nhất bằng những mô hình hỗn độn. Các phương pháp phân tích được phát triển cho hỗn độn có thể chứng tỏ có giá trị trong thực tiễn, dù động lực nền tảng của hệ thống thực phát sinh ra những tín hiệu được phân tích có bản chất là gì.

Hỗn độn Hamilton

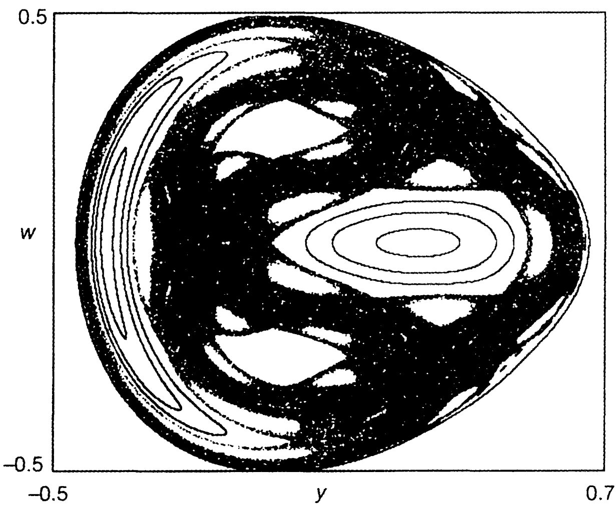
Nếu các thể tích trong không gian biểu diễn không co lại theo thời gian, có thể không có điểm thu hút. Năm 1964, Hénon và Heiles* công bố một công trình cho thấy động lực học hỗn độn trong một mô hình bốn chiều về vận động của một vì sao trong một thiên hà. Những hệ thống mà các thể tích trong không gian biểu diễn không co lại, gồm cả những hệ thống thuộc cơ học vũ trụ Newton thường được sử dụng để dự báo thiên thực, hay những hệ thống xác định lộ trình tương lai của hệ mặt trời và tàu vũ trụ bên trong nó, được gọi là các hệ thống *Hamilton***. Hình 17 là một lát cắt từ hệ thống Hénon-Heiles, cũng là một hệ thống Hamilton. Hãy để ý sự đan xen phức tạp của các hòn đảo rỗng với một biển các quỹ đạo hỗn độn. Những

---

* Carl Eugene Heiles (sinh năm 1939), nhà thiên văn học Mỹ.

** Đặt theo tên của William Rowan Hamilton (1805-1865), nhà vật lý, thiên văn và toán học Ireland.

biểu diễn ban đầu khởi sự bên trong những hòn đảo này có thể rơi vào những vòng lặp gần như khép kín (*torus*), hoặc chúng cũng có thể đi theo những quỹ đạo hỗn độn được giới hạn trong một chuỗi đảo. Trong cả hai trường hợp, thứ tự ghé thăm các hòn đảo là có thể đoán trước được, dù không thể dự đoán chính xác vị trí trên mỗi hòn đảo. Tuy vậy, mọi thứ chỉ đoán trước được ở những thang đo độ dài nhỏ.



Hình 17. Một mặt cắt hai chiều của điểm thu hút Hénon-Heiles. Hãy để ý những vòng lặp đồng thời và một biển hỗn độn các hòn đảo (trống rỗng).

Ứng dụng những hiểu biết về hỗn độn

Trong thời kỳ ba năm từ 1963 đến 1965, ba công trình độc lập đã xuất hiện (bởi Lorenz, Moore và Spiegel, Hénon và Heiles), mỗi công trình đều sử dụng máy tính kỹ thuật số để đưa vào thứ ngày nay được gọi là "động lực hỗn độn". Ở Nhật Bản, sự hỗn độn đã được quan sát trong những thí nghiệm bằng máy tính mô hình bởi Yoshisuke Ueda*, và các nhà toán học người Nga cũng đang tiến bộ dựa trên một nền tảng được xây dựng bởi hơn một thế kỷ của toán học quốc tế. Gần 50 năm sau, chúng ta vẫn đang tìm ra những cách mới để khai thác những hiểu biết này.

Điều gì giới hạn tính có thể dự báo của những nhật thực tương lai? Có phải là tính không chắc chắn trong kiến thức của chúng ta về quỹ đạo của các hành tinh, do mức độ chính xác của những đo lường hiện thời còn hạn chế? Hay những thay đổi tương lai trong độ dài của ngày, khiến điểm thấy nhật thực trên trái đất trở nên khác đi? Hay sự thất bại của những phương trình Newton do các hiệu ứng được mô tả (tốt hơn) bởi thuyết tương đối tổng quát? Chúng ta có thể thấy mặt trăng đang từ từ di chuyển xa khỏi trái đất, và giả sử điều này tiếp diễn, cuối cùng nó sẽ trở nên quá nhỏ để

* Yoshisuke Ueda (sinh năm 1936), nhà toán học Nhật.

che được toàn bộ mặt trời. Trong trường hợp đó, sẽ có một nhật thực toàn phần cuối cùng. Liệu chúng ta có thể dự báo khi nào sự kiện đó xảy ra, và nếu thời tiết cho phép, chúng ta nên ở đâu trên bề mặt trái đất để thấy được nó? Chúng ta không biết câu trả lời cho câu hỏi này. Chúng ta cũng không biết chắc liệu hệ mặt trời có ổn định không. Newton đã nhận thức rõ những khó khăn mà các tính chất phi tuyến đặt ra cho việc xác định sự ổn định cuối cùng dù chỉ của ba thiên thể, và đã đề xuất rằng việc đảm bảo sự ổn định của hệ mặt trời là một nhiệm vụ dành cho Thượng đế. Bằng cách hiểu những kiểu quỹ đạo hỗn độn mà các hệ thống Hamilton thừa nhận, chúng ta đã học được nhiều điều về sự ổn định cuối cùng của hệ mặt trời. Hiện nay, suy đoán tốt nhất của chúng ta là hệ mặt trời có lẽ ổn định. Những nhận thức như thế này đến từ sự hiểu biết hình học trong không gian biểu diễn hơn là từ việc thử tính toán chi tiết dựa trên những quan sát.

Liệu chúng ta có thể an toàn rút ra những kết luận sáng tỏ từ dáng điệu toán học của các hệ thống có số chiều thấp không? Chúng gợi ý những hiện tượng mới để đi tìm trong thí nghiệm, chẳng hạn sự nhân đôi theo chu kỳ, hoặc chúng gợi ý những hằng số mới để ước tính trong Tự nhiên, chẳng hạn số Feigenbaum. Các hệ thống đơn giản này còn cung cấp cơ sở kiểm chứng cho những phương pháp dự đoán của chúng ta - điều này hơi nguy hiểm hơn. Những hiện tượng của các hệ thống hỗn độn có số chiều thấp liệu có là cùng những hiện tượng mà chúng ta quan sát trong các mô hình phức tạp hơn không? Chúng có thông thường đến mức xuất hiện *ngay cả trong* những hệ thống đơn giản có số chiều thấp như hệ thống Lorenz năm 1963, hay hệ thống Moore-Spiegel? Hay những hiện tượng này là do tính chất đơn giản của các ví dụ ấy: có phải chúng xuất hiện *chỉ trong* những hệ thống toán học đơn giản? Cùng câu hỏi *ngay cả trong* và *chỉ trong* ở trên cũng áp dụng cho những kỹ thuật được phát triển để dự báo hoặc kiểm soát các hệ thống hỗn độn và được kiểm chứng trong những hệ thống có số chiều thấp: có phải những thứ này xảy ra *ngay cả trong* hoặc *chỉ trong* những hệ thống có số chiều thấp? Câu trả lời thiết thực nhất cho đến giờ là, những khó khăn chúng ta phát hiện trong các hệ thống có số chiều thấp hiếm khi mất đi trong những hệ thống có số chiều cao hơn, trong khi đó giải pháp cho những khó khăn này tuy phát huy tác dụng trong những hệ thống có số chiều thấp lại thường thất bại khi áp dụng trong những hệ thống có số chiều cao hơn. Nhận ra nguy hiểm của việc khái quát hóa từ những hệ thống ba chiều, từ khoảng 50 năm trước, Lorenz đã chuyển sang một hệ thống 28 chiều; ngày nay ông vẫn đang tạo ra những hệ thống mới, một số trong hai chiều và một số trong 200 chiều.

Sự hỗn độn và phi tuyến ảnh hưởng tới nhiều lĩnh vực. Có lẽ hiểu biết sâu xa nhất có thể rút ra ở đây là, những giải pháp có vẻ phức tạp đôi khi lại chấp nhận được và không nhất thiết là do nhiễu động lực bên ngoài. Điều này không có nghĩa là trong bất kỳ trường hợp cụ thể nào chúng cũng không phải do nhiễu bên ngoài. Nó cũng không làm giảm bớt giá trị thực tiễn của việc dựng mô hình thống kê ngẫu nhiên, với gần một thế kỷ kinh nghiệm và kỹ năng thực hành thống kê. Nhưng quả thật nó cho thấy cần phải phát triển những kiểm nghiệm để biết nên sử dụng những phương pháp nào trong một ứng dụng cụ thể, cũng như những kiểm nghiệm về sự nhất quán cho mọi kiểu mô hình được tiếp cận. Các mô hình của chúng ta nên tự do nhất có thể, nhưng không nên quá hơn thế. Tác động lâu dài của những hệ thống đơn giản này có lẽ là trong giá trị giáo dục của chúng. Động thái phong phú của những hệ thống đơn giản này có thể được giới thiệu từ sớm trong hệ thống giáo dục. Bằng cách đòi hỏi sự nhất quán bên trong, toán học ràng buộc trí tưởng tượng của chúng ta trong việc tạo ra những ẩn dụ, nhưng không hẳn để đưa chúng hòa hợp với thực tại vật lý, mà thường để mở ra những cánh cửa mới.

5

Fractal, điểm thu hút lạ, số chiều

Bọ chét lớn có bọ chét nhỏ
đậu trên lưng để cắn chúng.
Bọ chét nhỏ có bọ chét nhỏ hơn,
và cứ thế đến vô tận.

A. de Morgan (1872)*

Một dẫn luận về sự hỗn độn sẽ không trọn vẹn nếu không đề cập đến các fractal**. Điều này không phải vì sự hỗn độn ám chỉ fractal hay fractal đòi hỏi có sự hỗn độn, mà đơn giản vì trong hỗn độn tán xạ, những fractal toán học

---

* Augustus de Morgan (1806 - 1871), nhà toán học và logic học Anh.

** Fractal là một hiện tượng tự nhiên hoặc tập hợp toán học thể hiện một hình thái lặp đi lặp lại ở mọi cấp độ.

thực cứ như thể không biết từ đâu xuất hiện. Việc phân biệt fractal toán học với fractal vật lý quan trọng không kém việc phân biệt những gì chúng ta gọi là hỗn độn trong các hệ thống toán học với hỗn độn trong các hệ thống vật lý. Bất chấp hàng thập kỷ bàn luận, vẫn không có một định nghĩa duy nhất về fractal được chấp nhận chung cho cả hai trường hợp trên, dù bình thường bạn có thể nhận ra khi thấy nó. Quan niệm về fractal đi liền với tính chất tự đồng dạng [self-similarity]: khi phóng lớn đường ranh giới của những đám mây, những quốc gia hay đường bờ biển, chúng ta liên tục thấy các hình dạng tương tự như những gì quan sát được ở các quy mô chiều dài lớn hơn. Điều tương tự cũng xảy ra với tập hợp các điểm ở hình 18. Trong đó, tập hợp bao gồm năm cụm điểm. Nếu phóng lớn bất kỳ cụm điểm nào, chúng ta thấy hình phóng lớn trông giống như toàn bộ tập hợp. Nếu đó là sự giống nhau hoàn toàn - nếu hình phóng lớn là tương đương với tập hợp ban đầu - thì tập hợp được gọi là *tự đồng dạng hoàn toàn* [strictly self-similar]. Nếu chỉ những tính chất thống kê đáng quan tâm được lặp lại, tập hợp được gọi là *tự đồng dạng thống kê* [statistically self-similar]. Việc quyết định chính xác cái gì được xem là "tính chất thống kê đáng quan tâm" mở ra một trong những bàn luận khiến người ta không đạt được sự đồng thuận về một định nghĩa tổng quát. Cần phải có một trình bày chuyên sâu mới đủ để tháo gỡ những chi tiết lý thú này; còn bây giờ, chúng ta sẽ tạm hài lòng với một số ví dụ.

Cuối thế kỷ 18, fractal đã được bàn luận rộng rãi bởi các nhà toán học, trong đó có Georg Cantor*, dù tập hợp Các phần ba giữa (*Middle Thirds set*) nổi tiếng mang tên ông được khám phá trước tiên bởi một nhà toán học của Oxford tên là Henry Smith (1826 - 1883). Trong 100 năm sau đó, các thực thể fractal thường bị những bậc sinh thành toán học của chúng chối bỏ như những đường cong quái dị. Đó cũng đồng thời là lúc L. F. Richardson** đang bắt đầu lượng hóa bản chất fractal của những fractal tự nhiên khác nhau. Fractal vật lý và fractal toán học được chào đón nồng nhiệt hơn bởi các nhà thiên văn học, khí tượng học và khoa học xã hội. Một trong những fractal đầu tiên kết nối sự phân chia - và xóa nhòa sự phân biệt - giữa một không gian toán học và không gian đời thực đã xuất hiện khoảng 100 năm trước trong một nỗ lực giải nghịch lý Olbers.

---

* Georg Cantor (1845-1918), nhà toán học người Đức, được biết tới nhiều nhất như người phát minh ra lý thuyết tập hợp, sau trở thành một trong những lý thuyết toán học nền tảng.

** Lewis Fry Richardson (1881 - 1953), nhà toán học, vật lý học Anh

Một lời giải fractal cho nghịch lý Olbers

Năm 1823, nhà thiên văn học người Đức Heinrich Olbers* tóm lược mối quan tâm nhiều thế kỷ của các nhà thiên văn học trong câu hỏi ngắn gọn: "Tại sao bầu trời đêm lại tối?" Nếu vũ trụ là lớn vô tận và ít nhiều được lấp đầy một cách đồng đều bởi những ngôi sao, vậy sẽ có sự cân bằng giữa số ngôi sao ở một khoảng cách nhất định và ánh sáng chúng ta có được từ mỗi ngôi sao. Sự cân bằng tinh vi này ám chỉ rằng bầu trời đêm nên sáng một cách đồng đều. Thậm chí, sẽ khó thấy mặt trời trên một bầu trời ban ngày sáng tương tự. Nhưng bầu trời đêm lại tối. Đó là nghịch lý Olbers. Năm 1610, Johannes Kepler** đã sử dụng điểm này để chứng minh chỉ có một số lượng ngôi sao hữu hạn. Edgar Allan Poe là người đầu tiên nêu lên một luận điểm ngày nay vẫn thịnh hành: bầu trời đêm tối là vì vẫn chưa có đủ thời gian để ánh sáng từ những ngôi sao xa xôi đến được trái đất. Trong một công trình năm 1907, Fournier d'Albe*** đề xướng một lý thuyết đẹp khác, cho rằng sự phân bố vật chất trong

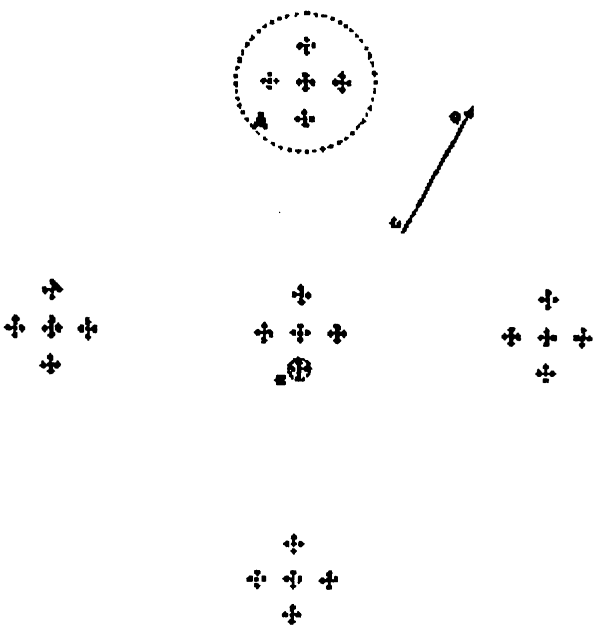
---

* Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1758 - 1840).

** Johannes Kepler (1571 - 1630), nhà toán học, thiên văn học Đức.

*** Edmund Edward Fournier d'Albe (1868 - 1933), nhà vật lý học Ireland.

vũ trụ là đồng đều nhưng theo một cung cách fractal. Fournier minh họa đề xuất của ông bằng một hình ảnh được tái tạo ở hình 18. Tập hợp này được gọi là Vũ trụ Fournier [Fournier Universe]. Nó là tập hợp hoàn toàn tự đồng dạng: phóng lớn một trong những hình khối nhỏ theo hệ số bằng 5, và chúng ta có bản sao chính xác của tập hợp ban đầu. Mỗi hình khối nhỏ chứa đựng toàn bộ của tổng thể.



Hình 18. Vũ trụ Fournier, trình bày cấu trúc tự đồng dạng, được chính Fournier công bố năm 1907.

Vũ trụ Fournier minh họa một biện pháp thoát khỏi nghịch lý Olbers: đường thẳng được Fournier đặt ở hình 18 cho thấy một trong nhiều hướng mà chúng ta sẽ không bao giờ tìm thấy một "ngôi sao" nào khác. Fournier không dừng lại ở cái lớn vô cùng, nhưng cũng chủ trương rằng sự phân tầng này thực ra mở rộng đến nhỏ vô cùng. Ông lý giải nguyên tử như các tiểu vũ trụ, đến lượt chúng lại được tạo thành bởi những hạt nhỏ hơn. Và ông gợi ý những đại vũ trụ, trong đó các thiên hà của chúng ta đóng vai trò như những nguyên tử. Theo hướng này, ông đề xuất một trong số ít ỏi những fractal vật lý không có ngưỡng trong và không có ngưỡng ngoài: một sự phân tầng đi từ vô cực lớn đến vô cực nhỏ theo cách gợi nhớ những cảnh cuối cùng trong bộ phim *Đặc vụ áo đen* (*Men in Black*)*.

Fractal trong vật lý

Vòng xoáy lớn có vòng xoáy nhỏ,
bởi vận tốc của chúng.
Và vòng xoáy nhỏ có vòng xoáy nhỏ hơn,
cứ vậy đến khi đặc quánh.

L. F. Richardson

* *Men in Black*, bộ phim khoa học giả tưởng Mỹ năm 1997 do Barry Sonnenfeld đạo diễn.

Mây, núi và đường bờ biển là những ví dụ thường gặp của fractal tự nhiên, những vật thể tự đồng dạng thống kê tồn tại trong không gian thực. Sự quan tâm tạo ra những bất thường fractal không phải là mới. Bản thân Newton đã ghi nhận một phương pháp: ông nhận thấy khi bia được rót vào sữa và "hỗn hợp được để yên cho đến khi khô, thì bề mặt của chất liệu vón cục ở mọi điểm biểu hiện gồ ghề và nhấp nhô giống như trái đất". Khác với chất liệu vón cục của Newton, những fractal của hỗn độn là những đối tượng toán học, được tìm thấy trong không gian biểu diễn; chúng là những fractal thật, trái ngược với những vật thể vật lý kia. Đâu là sự khác nhau? Vì một lẽ: một fractal vật lý chỉ thể hiện những tính chất fractal ở những quy mô chiều dài nhất định, còn ở những quy mô khác thì không. Hãy xem rìa của một đám mây: nhìn càng sát, đi vào những thang đo độ dài ngày càng nhỏ hơn, bạn sẽ tới một điểm không còn ranh giới nữa. Đám mây biến mất vào sự gấp gáp hỗn loạn của các phân tử, và không còn ranh giới nào để đo lường. Tương tự, một đám mây không tự đồng dạng ở những quy mô độ dài cỡ như kích thước trái đất. Với các fractal vật lý, khái niệm fractal sụp đổ khi chúng ta nhìn quá sát; những ranh giới vật lý này khiến chúng ta dễ nhận ra những hiệu ứng đặc biệt của Hollywood khi họ sử dụng tàu mô hình trong những bể tạo sóng: có thể thấy đường ranh giới có thang đo dài không đúng so với "những con tàu". Ngày nay, các nhà làm phim ở Hollywood đã biết đủ nhiều về toán học để tạo ra những thứ làm giả bằng máy tính, che giấu đường ranh giới tốt hơn. Nghệ sĩ Hokusai* người Nhật Bản đã lưu tâm đến đường ranh giới này trong bức họa "Sóng lớn" nổi tiếng của ông thời những năm 1830. Các nhà vật lý học cũng đã biết điều này trong một thời gian: bài thơ của De Morgan cho phép tầng tầng lớp lớp những con bọ chét kéo dài *ad infinitum*, "đến vô tận", trong khi những vòng xoáy trong lối giải thích của L. F. Richardson đối mặt với một giới hạn do độ đặc quánh (*viscocity*), thuật ngữ chỉ sự ma sát trong chất lỏng. Richardson là chuyên gia về lý thuyết và những quan sát về sự nhiễu loạn. Ông từng ném củ cải xuống một đầu kênh Cape Cod ở những khoảng thời gian cách quãng đều đặn, và sử dụng thời gian chúng đến chân cầu ở đầu kia của kênh để lượng hóa sự phân tán của chất lỏng khi đi xuôi dòng. Ông cũng tính toán (bằng tay!) dự báo thời tiết số học đầu tiên trong thời kỳ Thế chiến I.

---

* Katsushika Hokusai (? - 1849), danh hoạ Nhật.

Là một tín đồ phái Quaker, rời Nha Khí tượng trong Thế chiến I để trở thành một lái xe cứu thương ở Pháp, Richardson sau này quan tâm đo lường chiều dài đường biên giới giữa các quốc gia nhằm kiểm chứng lý thuyết của ông rằng điều này ảnh hưởng tới khả năng họ tham chiến. Ông nhận ra một hiệu ứng kỳ cục khi đo cùng một biên giới trên những bản đồ khác nhau: biên giới giữa Tây Ban Nha và Bồ Đào Nha được đo trên bản đồ của Bồ Đào Nha dài hơn nhiều so với khi được đo trên bản đồ của Tây Ban Nha! Đo bờ biển của những đảo quốc như Anh, ông thấy chiều dài đường bờ biển tăng lên khi kích thước của thước cặp mà ông dùng để đo dọc theo bờ biển giảm xuống, và cũng nhận thấy một mối quan hệ bất ngờ giữa diện tích của một hòn đảo và chu vi của nó khi cả hai cùng biến đổi trong quá trình đo trên những thang đo khác nhau. Richardson chứng minh rằng những thay đổi theo thang đo độ dài tuân thủ một hình thái rất đều đặn, có thể được tổng kết bởi một số duy nhất cho mỗi đường ranh giới cụ thể: nó là một số mũ liên hệ độ dài của một đường cong với thang đo độ dài được dùng để đo nó. Sau công trình nền tảng của Mandelbrot**,

** Benoit Mandelbrot (1924-2010), nhà toán học Mỹ gốc Ba Lan, được biết vì phát triển một "lý thuyết độ nhám" và "sự tự đồng con số này được gọi là *số chiều fractal* [fractal dimension] của đường ranh giới.

Richardson đã phát triển một loạt các phương pháp khác nhau để ước tính số chiều fractal của những fractal vật lý. Phương pháp diện tích - chu vi định lượng sự thay đổi của cả diện tích lẫn chu vi dưới độ phân tích ngày càng cao. Với một đối tượng cụ thể, chẳng hạn như một đám mây riêng biệt, mối quan hệ này cũng đưa đến số chiều fractal cho đường ranh giới của đám mây. Khi chúng ta nhìn vào nhiều đám mây *khác nhau ở cùng* độ phân tích, chẳng hạn trong một bức ảnh chụp từ không trung, một mối quan hệ tương tự giữa các diện tích và các chu vi sẽ xuất hiện. Chúng ta không hiểu tại sao mối quan hệ diện tích - chu vi này có vẻ đúng cho những tập hợp đám mây có kích cỡ khác nhau, trong khi ai cũng biết rằng không phải mọi đám mây đều giống nhau.

Fractal trong không gian biểu diễn

Tiếp theo, chúng ta xây dựng một hệ thống toán học khá nhân tạo, với mục đích xua tan một trong những điều hoang đường dai dẳng và lầm lẫn nhất về hỗn độn: việc phát hiện một tập hợp

---

dạng" trong tự nhiên và trong lĩnh vực hình học fractal.

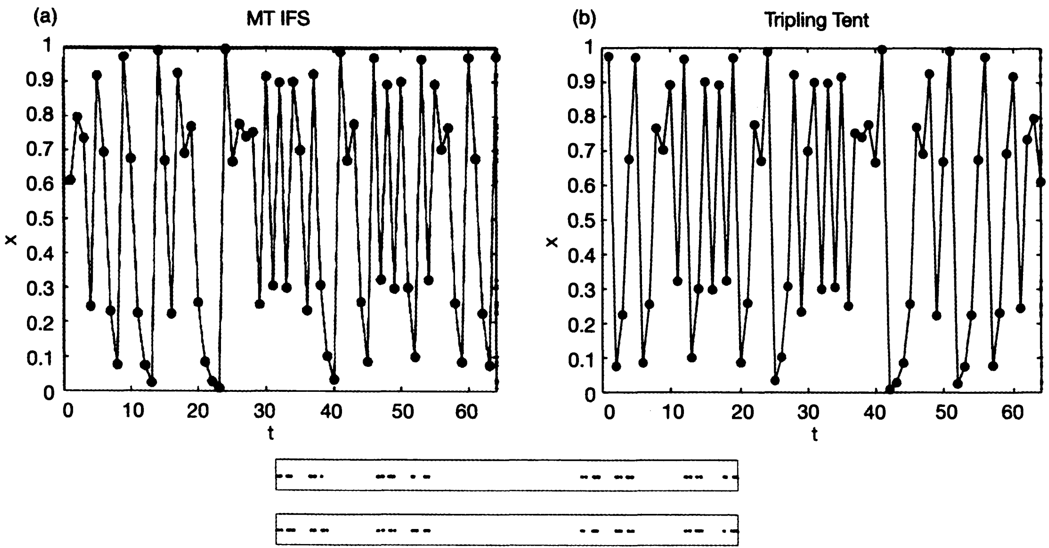
fractal trong không gian biểu diễn cho thấy động lực tất định. *Ánh xạ lều nhân ba* [Tripling Tent Map] là:

> Nếu X nhỏ hơn ½, lấy 3X làm giá trị mới của X. Trường hợp khác, lấy 3-3X làm giá trị mới của X.

Hầu hết mọi biểu diễn ban đầu giữa 0 và 1 sẽ đi xa khỏi gốc; chúng ta sẽ bỏ qua những trường hợp này và tập trung vào các điều kiện ban đầu còn nằm lại mãi giữa 0 và 1 - và số lượng của chúng là vô hạn. (Ở đây chúng ta bỏ qua nghịch lý hiển nhiên do cách dùng lỏng lẻo của chữ "vô hạn", nhưng hãy lưu ý lời cảnh báo của Newton, "nguyên lý mọi thứ vô hạn đều bằng nhau là một nguyên lý tạm thời".)

Ánh xạ lều nhân ba là hỗn độn: nó rõ ràng là tất định, những quỹ đạo chúng ta quan tâm là tái lặp, và sự chia tách giữa các điểm cực gần tăng lên theo hệ số bằng 3 sau mỗi lần lặp, nói lên sự phụ thuộc nhạy. Một chuỗi thời gian từ *Ánh xạ lều nhân ba* và một chuỗi từ Ánh xạ IFS *Phần ba giữa* ngẫu nhiên được trình bày ở hình 19. Về mặt thị giác, chúng ta bắt gặp những gợi ý cho thấy ánh xạ hỗn độn dễ dự báo hơn: theo sau những giá trị nhỏ của X *luôn là* những giá trị nhỏ của X. Hai sơ đồ nhỏ ở phần dưới cùng của hình 19 lần lượt cho thấy tập hợp các điểm được một đường đi dài từ một trong hai hệ thống bên trên chạm vào: trông chúng rất giống nhau, và trên thực tế, cả hai đều phản ánh những điểm từ tập hợp *Phần ba giữa Cantor.* Hai hệ thống động lực ghé đến cùng một tập hợp fractal, nên chúng ta không bao giờ phân biệt được hệ thống tất định với hệ thống ngẫu nhiên nếu chỉ nhìn vào số chiều của tập hợp các điểm mà từng hệ thống ghé đến. Nhưng liệu có gì ngạc nhiên không, nếu để hiểu động lực học, chúng ta phải xét xem hệ thống vận động như thế nào, chứ không chỉ nó đã ở nơi nào? Phản thí dụ đơn giản này phá tan điều hoang đường đã nói ở trên; các hệ thống hỗn độn có thể thường vận động theo những tập hợp fractal, nhưng việc phát hiện một tập hợp có số chiều hữu hạn không cho thấy tính tất định, cũng không cho thấy động lực hỗn độn.

Việc phát hiện fractal trong những ánh xạ toán học được xây dựng cẩn thận không phải là điều quá ngạc nhiên, bởi các nhà toán học đủ thông minh để thiết kế những ánh xạ tạo ra fractal. Một trong những đặc điểm rõ ràng nhất về hỗn độn tán xạ là các fractal xuất hiện nhưng không có ích lợi gì cho mục đích trí tuệ. Ánh xạ Hénon là một ví dụ kinh điển. Về phương diện toán học, nó đại diện cho cả một lớp mô hình thú vị; trong định nghĩa của nó không có gì đặc biệt

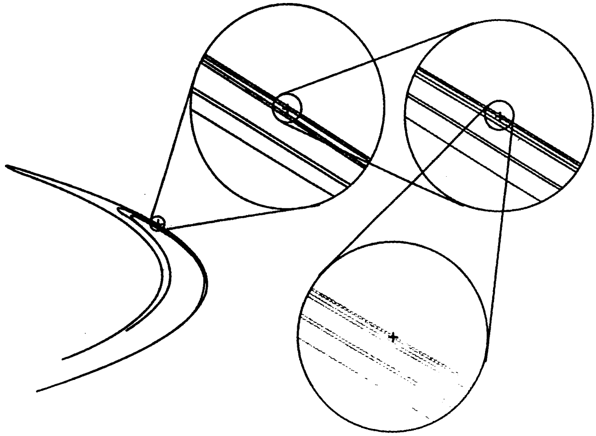


Hình 19. Một chuỗi thời gian từ (a) Ánh xạ IFS *Phần ba giữa* ngẫu nhiên, và (b) *Ánh xạ lều nhân ba* tất định. Những đồ thị chèn thêm vào phía cuối trình bày tóm lược về mọi điểm được ghé đến: mỗi trường hợp đều gần đúng với tập hợp *Phần ba giữa Cantor*.

"trông như fractal" giống như trong Ánh xạ IFS *Phần ba giữa*. Hình 20 trình bày một loạt những hình phóng lớn từ nơi các cấu trúc tự đồng dạng nhảy ra như trong trò ảo thuật. Chắc chắn đây là một trong những điều đáng ngạc nhiên nhất về các hệ thống động lực phi tuyến. Không có dấu vết thiết kế nhân tạo nào trong Ánh xạ Hénon, và cấu trúc fractal có vẻ là điều bình thường trong những điểm hấp dẫn của các hệ thống hỗn độn tán xạ. Không nhất thiết phải có nó trong sự hỗn độn hay ngược lại, nhưng nó thường xuất hiện.

Giống như mọi trò ảo thuật, mánh khóe có thể được hiểu ít nhất sau khi nó đã được thực hiện: chúng ta đã chọn phóng lớn xung quanh một điểm cố định của Ánh xạ Hénon, và nhìn vào những tính chất của ánh xạ rất gần với điểm này, chúng ta biết phải phóng lớn đến đâu để khiến sự tự đồng dạng trở nên đập vào mắt. Những chi tiết của cấu trúc lặp lại, như một đường dày và hai đường mỏng, phụ thuộc vào những gì xảy ra ở cách xa điểm này. Nhưng nếu Ánh xạ Hénon thật sự hỗn độn và đường đi của máy tính được sử dụng để tạo ra những bức tranh này là thực tiễn, khi ấy tự nhiên chúng ta có một điểm thu hút fractal.

Lý thuyết truyền thống về sự nhiễu loạn trong không gian biểu diễn đã phản ánh bài thơ của Richardson: người ta cho rằng các phương



Hình 20. Một loạt các hình phóng lớn từ một điểm cố định không ổn định của Ánh xạ Hénon, được đánh dấu "+" trong từng trường hợp. Cùng một hình dạng lặp đi lặp lại cho đến khi chúng ta bắt đầu cạn kiệt các điểm dữ liệu.

thức ngày càng mang tính chu kỳ sẽ được kích thích, và việc lần theo tổng tuyến tính của tất cả những dao động ấy sẽ đòi hỏi một không gian biểu diễn có số chiều rất cao. Nên hầu hết các nhà vật lý học kỳ vọng điểm thu hút của sự nhiễu loạn sẽ là những hình xuyến có số chiều cao, hay nói theo thuật ngữ toán học là *torus*. Đầu những năm 1970, David Ruelle và Floris Takens khi ấy đang đi tìm những giải pháp khác để làm các *torus* số chiều cao trở nên nhẵn hơn, và đã bắt gặp những điểm thu hút fractal có số chiều thấp hơn; họ thấy những điểm thu hút fractal là "lạ".

Ngày nay, từ "lạ" được sử dụng để mô tả tính chất hình học của điểm thu hút, hay nói cụ thể, việc nó là một fractal, còn từ "hỗn độn" được sử dụng để mô tả động lực của hệ thống. Đây là một phân biệt hữu ích. Nguồn gốc chính xác của cụm từ "***điểm thu hút lạ***" [strange attractor] giờ đây không ai biết, nhưng thuật ngữ này đã chứng tỏ là một tên gọi thích hợp và truyền cảm hứng cho những đối tượng nói trên của vật lý toán học. Các hệ thống Hamilton không hề có điểm thu hút, nên chúng không có điểm thu hút lạ. Tuy nhiên, chuỗi thời gian hỗn độn từ các hệ thống Hamilton thường tạo thành những hình mẫu rắc rối với tính chất không đồng nhất lộ hẳn ra và những dấu hiệu về sự tự đồng dạng gọi là *những bộ cộng lạ* [strange accumulators] - những thứ còn tồn tại chừng nào chúng ta còn sử dụng máy tính. Số phận cuối cùng của chúng vẫn chưa được biết.

Các chiều fractal

Đếm số phần tử trong vector biểu diễn, chúng ta biết số chiều của không gian biểu diễn. Nhưng làm thế nào chúng ta ước tính số chiều của một tập hợp điểm nếu những điểm ấy không xác định một đường ranh giới, chẳng hạn những điểm tạo ra một điểm thu hút lạ? Một biện pháp gợi nhớ mối quan hệ diện tích - chu vi là dùng những ô vuông ở một kích thước nhất định để che phủ hoàn toàn tập hợp ấy, và xem số ô vuông cần có tăng lên như thế nào khi kích thước của các ô vuông riêng biệt trở nên nhỏ hơn. Một biện pháp khác là xét xem về trung bình số điểm thay đổi như thế nào khi bạn nhìn vào bên trong một hình cầu đặt ở giữa một điểm ngẫu nhiên, và giảm bán kính của hình cầu. Để tránh những rắc rối nảy sinh gần rìa của một điểm thu hút, nhà toán học sẽ chỉ xét những hình cầu có bán kính nhỏ đến gần như biến mất, r. Chúng ta thấy những kết quả trông tương tự nhau: gần một điểm ngẫu nhiên trên một đường thẳng, số điểm tỉ lệ với r^1; xung quanh một điểm trên một mặt phẳng, nó tỉ lệ với ϖr^2, và xung quanh một điểm từ tập hợp xác định một hình khối đặc, nó tỉ lệ với $4/3\ \varpi r^3$. Trong mỗi trường hợp, lũy thừa của r phản ánh số chiều của tập hợp: số chiều là một nếu tập hợp tạo thành một đường thẳng, hai nếu một mặt phẳng, và ba nếu là hình khối đặc.

Phương pháp này có thể được áp dụng cho các tập hợp fractal, dù các fractal có xu hướng xuất hiện các lỗ được gọi là chỗ khuyết [*lacuna*] ở mọi quy mô đo lường. Việc xử trí những nếp gợn logarithm này là không hề nhỏ, mặc dù vậy chúng ta có thể tính toán chính xác số chiều của những tập hợp hoàn toàn tự đồng dạng, và ngay lập tức nhận thấy số chiều của một fractal thường không phải là một số nguyên. Đối với Vũ trụ Fournier, số chiều xấp xỉ là 0,7325 (bằng loga 5/ loga 9), trong khi tập hợp *Cantor Phần ba giữa* có số chiều xấp xỉ là 0,6309 (bằng loga 2/ loga 3); trong từng trường hợp, số chiều là một phân số lớn hơn 0 nhưng nhỏ hơn 1. Mandelbrot lấy chữ "fract" trong "fraction" (phân số) để tạo ra từ "fractal".

Số chiều của điểm thu hút Hénon là gì? Ước tính tốt nhất của chúng ta là nó xấp xỉ 1,26. Tuy nhiên, dù biết có một điểm thu hút, chúng ta không biết chắc liệu về lâu dài, điểm thu hút này có đơn thuần là một vòng lặp dài theo chu kỳ không. Trong các ánh xạ, mọi vòng lặp theo chu kỳ chỉ bao hàm một số lượng hữu hạn các điểm, bởi vậy có số chiều bằng 0. Để thấy điều này, chỉ cần xét những hình cầu với bán kính r nhỏ hơn cặp điểm gần nhất trên vòng lặp; số điểm trong mỗi hình cầu là hằng số (và bằng 1), nên chúng ta có thể viết là nó tỉ lệ với r^0, và từng điểm có số chiều bằng 0. Trong Chương 7, chúng ta sẽ thấy tại sao sử dụng một mô phỏng máy tính thì khó có thể chứng minh điều gì xảy ra về lâu dài. Trước hết, chúng ta sẽ nhìn vào những thách thức khi lượng hóa động lực của tính không chắc chắn ngay cả nếu biết rõ hệ thống toán học. Đối với những hệ thống của thế giới thực, chúng ta chỉ có những quan sát bị nhiễu, nên vấn đề còn khó hơn.

6

Lượng hóa động lực của tính không chắc chắn

Với việc khảo sát động lực của tính không chắc chắn, sự hỗn độn phơi bày những định kiến của chúng ta. Bất chấp những phóng đại về tính chất không thể dự báo, chúng ta sẽ thấy những con số được sử dụng để lượng hóa hỗn độn không đặt ra bất kỳ giới hạn nào cho sự chính xác của dự báo ngày nay: hỗn độn không ám chỉ rằng dự đoán trước là vô vọng. Nhìn vào lịch sử của những thống kê được sử dụng để đo lường tính không chắc chắn, chúng ta có thể thấy tại sao mối quan hệ giữa hỗn độn và tính có thể dự báo đã bị phóng đại theo hướng quá tệ. Hiện nay, những thống kê bổ sung cũng có sẵn.

Một khi các nhà khoa học đề cập đến tính không chắc chắn và tính có thể dự báo, đạo đức nghề nghiệp buộc họ phải làm sáng tỏ tính xác đáng của những gì họ dự báo và thông tin thống kê được sử dụng để lượng hóa mức độ không chắc chắn của họ. Người đàn ông nhìn ra ngoài trong bức họa của La Tour có thể đã cung cấp cho chàng trai trẻ những bảng xác suất chính xác cho mỗi sắp bài từ cỗ bài 52 quân, nhưng ông ta biết rằng những xác suất ấy không phản ánh trò chơi đang được chơi. Tương tự, con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta, bằng mô hình hoàn hảo của nó, có thể lượng hóa khá chính xác động lực của tính không chắc chắn. Nhưng chúng ta biết là không có một mô hình hoàn hảo. Khi chỉ có một tập hợp những mô hình không hoàn hảo, làm thế nào chúng ta liên hệ sự đa dạng trong động thái của chúng với tính không chắc chắn của chúng ta về trạng thái tương lai của thế giới thực?

Sự suy giảm của tính không chắc chắn: thông tin không có sự tương quan

Khi cần đưa ra dự báo một hệ thống sẽ làm gì tiếp theo, dữ liệu về trạng thái gần đây của hệ thống thường cung cấp nhiều thông tin hơn dữ liệu về một trạng thái quá khứ xa xôi nào đó. Trong những năm 1920, Udny Yule muốn biết so với dữ liệu của mười năm trước, dữ liệu vết đen mặt trời của năm nay cung cấp nhiều thông tin hơn ra sao về số vết đen xuất hiện năm tới, và muốn lượng hóa mức độ nhiều hơn đó. Một con số thống kê như vậy cũng sẽ cho phép ông so sánh định lượng những tính chất của dữ liệu ban đầu với những tính chất của chuỗi thời gian do các mô hình sinh ra. Ông phát minh ra thứ ngày nay được gọi là hàm tự tương quan [auto-correlation function], hay ACF. Hàm tự tương quan đo lường sự tương quan tuyến tính giữa những biểu diễn cách nhau k bước lặp. Khi k bằng 0, ACF là 1 vì bất kỳ số nào cũng tương quan hoàn hảo với chính nó. Nếu chuỗi thời gian phản ánh một tuần hoàn theo chu kỳ, ACF giảm thấp hơn 1 khi k tăng lên, sau đó trở lại bằng 1 mỗi khi k là một bội số chính xác của chu kỳ. Với dữ liệu từ một hệ thống ngẫu nhiên tuyến tính, ACF rất có giá trị, nhưng như chúng ta sẽ sớm thấy, nó ít có giá trị hơn khi gặp những quan sát từ một hệ thống phi tuyến. Tuy nhiên, một số nhà thống kê đã đi xa tới mức định nghĩa tính tất định như một sự tương quan tuyến tính. Nhiều người vẫn đang vướng vào sai lầm này. Chúng ta biết rõ rằng sự tương quan không ám chỉ quan hệ nhân quả, và nghiên cứu về hỗn độn cũng đã cho thấy rõ quan hệ nhân quả không ám chỉ sự tương quan (tuyến tính). Sự tương quan giữa các biểu diễn liên tiếp của Ánh xạ logistic đầy đủ là bằng 0 bất kể thực tế rằng biểu diễn tiếp theo hoàn toàn được định đoạt bởi biểu diễn hiện thời. Thật ra, ACF của nó bằng 0 cho mọi phân cách về thời gian. Vậy làm sao chúng ta có thể phát hiện những mối quan hệ trong các hệ thống phi tuyến, chưa nói tới việc lượng hóa tính có thể dự báo, nếu cả một thế kỷ phân tích thống kê vẫn mù loà trước những mối quan hệ thấy được bằng mắt này? Để trả lời câu hỏi, trước hết chúng ta hãy giới thiệu cơ số hai.

Bit và thông tin

Máy tính có xu hướng ghi nhận các số theo ký pháp nhị phân: thay vì sử dụng mười ký hiệu (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, và 9) mà chúng ta học ở trường, máy tính chỉ sử dụng hai chữ số đầu tiên (0 và 1). Các ký hiệu 1000, 1000 và 10 thay vì biểu diễn 10^3, 10^2 và 10^1, thì trong hệ nhị phân, chúng biểu diễn 2^3, 2^2 và 2^1, nghĩa là tám, bốn và hai. Ký hiệu 11 trong cơ số hai biểu diễn $2^1 + 2^0$, nghĩa là ba, còn 0.10 biểu diễn 2^{-1} (một nửa), 0.001 biểu diễn 2^{-3} (một phần tám). Vì vậy mới có chuyện đùa rằng có mười loại nhà toán học trên đời: những người hiểu ký pháp nhị phân và những người không hiểu. Giống như nhân mười (10) thì dễ trong cơ số mười, nhân hai (10) cũng dễ trong cơ số hai: chỉ cần dịch chuyển mọi *bit* sang trái, nghĩa là 1.0100101011 trở thành 10.100101011, từ đây sinh ra tên gọi Ánh xạ dịch chuyển. Tương tự khi chia cho hai: chỉ là một dịch chuyển sang phải*.

Máy tính thường sử dụng một số *bit* cố định cho mỗi con số, và không lãng phí không gian bộ nhớ quý giá cho việc lưu trữ "dấu thập phân". Điều này khiến phép chia trở nên hơi kỳ dị: trên một máy tính, chia 00101001010100 cho hai được kết quả 00010100101010; nhưng chia 00101001010101 cho hai cũng được cùng kết quả! Nhân 00010100101010 với hai được kết quả 0010100101010Q, trong đó Q là một bit mới mà máy tính phải tạo ra. Với mọi dịch chuyển trái cũng tương tự: phải có một bit mới ở chỗ trống ngoài cùng bên phải. Khi chia cho hai, một số 0 đúng ra xuất hiện tại chỗ trống ngoài cùng bên trái, nhưng bất kỳ *bit* nào bị dịch về phía phải của cửa sổ cũng bị biến mất mãi mãi vào vùng chứa *bit*. Điều này đưa đến một đặc điểm phiền toái: nếu chúng ta lấy một số và chia cho hai, rồi nhân với hai, có thể chúng ta không trở lại với con số ban đầu.

Bàn luận cho đến lúc này dẫn tới những cách nhìn khác nhau về sự tăng trưởng và suy giảm

---

* Trong tiếng Anh cũng như ký pháp nhị phân, dấu "*chấm*" (.) là dấu thập phân.

của tính không chắc chắn - hay sự tạo lập thông tin - trong nhiều kiểu hệ thống động lực toán học của chúng ta: các hệ thống ngẫu nhiên, các hệ thống toán học hỗn độn, các phiên bản máy tính hóa của những hệ thống toán học hỗn độn. Diễn tiến trạng thái của một hệ thống thường được hình dung như một dải băng đi qua một hộp đen. Điều xảy ra bên trong hộp tùy thuộc vào kiểu hệ thống động lực đang quan sát. Khi dải băng ra khỏi hộp, chúng ta thấy những *bit* được viết trên nó. Câu hỏi là dải băng trắng hay đã có những *bit* được viết lên khi đi vào đằng sau hộp là một câu hỏi dẫn tới những bàn luận nồng nhiệt trong những căn phòng của tháp ngà*. Có những phương án nào? Nếu động lực là ngẫu nhiên thì dải băng khi đi vào hộp là trắng, và ra khỏi hộp với một *bit* được xác định ngẫu nhiên và in lên nó. Trong trường hợp này, bất kỳ hình mẫu nào chúng ta tin là mình thấy được trong những *bit* đó khi dải băng liên tục chạy tới cũng là một ảo ảnh. Nếu hệ thống động lực là tất định thì các *bit* vốn đã được in lên dải băng (và không giống như chúng ta, con quỷ của Laplace có khả năng đã thấy toàn bộ chúng); chúng ta không thể thấy rõ chúng cho đến khi chúng đi qua hộp, nhưng chúng đã có đó. Trong cả hai khả năng,

* Nơi con người ẩn mình để xa lánh thực tế.

việc tạo ra tất cả những *bit* thông tin ấy cũng là một thứ giống như một phép mầu, và có vẻ chuyện bạn thích một phép mầu lớn hay một dòng đều đặn những phép mầu nhỏ là vấn đề sở thích cá nhân: trong một hệ thống tất định, bức tranh trên cũng giống như tạo ra một số lượng vô hạn các *bit* cùng một lúc, một số vô tỷ và cũng là biểu diễn ban đầu; trong hệ thống ngẫu nhiên, các *bit* trông như thể mới được tạo ra ở mỗi lần lặp. Dĩ nhiên, trong thực tế, có lẽ chúng ta có sự kiểm soát nhất định về độ chính xác khi đo lường thứ gì đó, và điều này gợi ý rằng dải băng đã được in trước.

Trong định nghĩa của một hệ thống hỗn độn, không có điều gì ngăn cản dải băng chạy ngược lại một lúc. Lúc ấy, dự báo trở nên đơn giản trong một thời gian vì chúng ta đã thấy dải băng sao lưu, và biết những *bit* sẽ xuất hiện khi nó lại chạy tới. Khi cố gắng biến hình ảnh này thành một kiểu hệ thống tính toán, chúng ta sẽ gặp khó khăn. Dải băng không thể thật sự trắng trước khi đi vào hộp: máy tính phải "tạo ra" những *bit* mới ấy với một quy tắc tất định nào đó khi nó dịch trái, nên trong thực tiễn, chúng đã được in lên dải băng trước khi đi vào hộp. Điều thú vị hơn là những gì xảy ra ở khu vực nơi dải băng sao lưu, bởi lẽ máy tính không thể "nhớ" bất kỳ *bit* nào nó mất đi tại một lần dịch phải. Với những ánh xạ có hệ số góc bất biến, chúng ta luôn dịch trái hoặc luôn dịch phải, nên dải băng không bao giờ sao lưu. Mô phỏng máy tính vẫn là một hệ thống tất định, dù những kiểu dải băng khác nhau mà nó có thể tạo ra thì ít phong phú hơn hẳn so với những dải băng của ánh xạ toán học tất định mà nó đang mô phỏng. Nếu ánh xạ đang được mô phỏng có những vùng với tính không chắc chắn giảm đi, sẽ có một giai đoạn nhất thời cho sự sao lưu của dải băng, và máy tính không thể biết những *bit* nào được viết lên nó. Khi dải băng tiếp tục chạy tới, máy tính sử dụng quy tắc nội bộ để tạo ra những *bit* mới, và chúng ta có thể thấy một số 0 và một số 1 bị in đè lên dải băng khi nó ra khỏi hộp lần thứ hai! Trong Chương 7, chúng ta bàn về những điều bất thường khác trong những mô phỏng máy tính của các hệ thống toán học hỗn độn.

Thống kê để dự báo tính có thể dự báo

Một trong những nhận thức về hỗn độn là sự tập trung vào nội dung thông tin. Trong những hệ thống tuyến tính, phương sai phản ánh nội dung thông tin. Nội dung thông tin có phần rắc rối hơn trong những hệ thống phi tuyến, bởi lẽ độ lớn không phải là chỉ báo duy nhất về tầm quan trọng. Có cách nào khác để chúng ta đo lường thông tin? Hãy xét những điểm trên một vòng tròn ở mặt phẳng X,Y với bán kính bằng 1, và chọn ngẫu nhiên một góc. Biết giá trị của X nói cho chúng ta nhiều điều về giá trị của Y - nó cho chúng ta biết Y là một trong hai giá trị. Tương tự, nếu không biết mọi *bit* cần thiết để mô tả X một cách đầy đủ, thì càng biết nhiều *bit* của X, chúng ta càng biết nhiều bit của Y. Dù không bao giờ có thể quyết định giữa hai giá trị của Y mà một trong hai là đúng, tính không chắc chắn của chúng ta liên quan đến hai giá trị ấy cũng giảm đi khi chúng ta đo lường X ngày một chính xác hơn. Không ngạc nhiên khi X và Y có một tương quan tuyến tính bằng 0 trong trường hợp này. Những đo lường thống kê khác đã được phát triển để lượng hóa khả năng biết về giá trị kia khi đã biết giá trị này. Chẳng hạn, *Thông tin lẫn nhau* [Mutual Information], hay MI, là một thông số phản ánh số *bit* trung bình của Y mà bạn biết được khi biết một *bit* khác của X. Đối với một vòng tròn, nếu biết năm *bit* đầu tiên của X, bạn biết bốn trong số năm *bit* đầu tiên của Y; nếu biết 20 *bit* của X, bạn biết 19 *bit* của Y; và nếu biết mọi *bit* của X, bạn biết mọi *bit* trừ một của Y. Không có *bit* còn thiếu đó, chúng ta không thể nói giá trị nào trong hai giá trị của Y là giá trị đúng. Và không may, từ quan điểm tư duy tuyến tính, *bit* đang thiếu là giá trị của bit "lớn nhất" ở Y. Tuy nhiên, sẽ là một sai lầm không nhỏ khi cho rằng sự tương quan bằng 0 nghĩa là bạn không biết được gì về Y khi biết giá trị của X.

Chỉ báo MI nói cho chúng ta điều gì về động lực của Ánh xạ logistic? MI phản ánh thực tế rằng việc biết chính xác một giá trị của X cho chúng ta thông tin đầy đủ về những giá trị tương lai của X. Nếu có một đo lường với độ chính xác nhất định về X, MI cho thấy trung bình chúng ta biết được bao nhiêu về một đo lường tương lai của X. Khi có nhiễu quan sát, chúng ta có xu hướng biết ít hơn về các giá trị tương lai của X nếu chúng thuộc về tương lai xa hơn, bởi lẽ những *bit* tương ứng của giá trị X hiện thời sẽ bị nhiễu che phủ. Bởi vậy MI có khuynh hướng suy giảm khi sự phân cách về thời gian tăng lên, trong khi hệ số tương quan tuyến tính là 0 cho mọi phân cách (ngoại trừ zero). MI là một công cụ hữu ích, và việc phát triển những thống kê tùy chỉnh theo nhu cầu để sử dụng trong những ứng dụng cụ thể là một lĩnh vực phát đạt trong động lực học phi tuyến. Quan trọng là biết rõ những thống kê mới này đang nói cho chúng ta điều gì, và quan trọng không kém là chấp nhận rằng có nhiều thứ để nói hơn những gì thống kê truyền thống có thể cho chúng ta biết.

Mô hình về nhiễu cung cấp một ý tưởng về tính không chắc chắn hiện thời, nên một thước đo về tính có thể dự báo là thời gian kỳ vọng để tính không chắc chắn nhân đôi. Cần tránh cái bẫy của tư duy tuyến tính, nghĩa là cho rằng thời gian nhân bốn sẽ gấp hai lần thời gian nhân đôi trong một hệ thống phi tuyến. Do không biết thời gian nào sẽ đáng lưu tâm (thời gian nhân đôi, thời gian nhân ba, thời gian nhân bốn...), chúng ta sẽ đơn giản nói tới thời gian nhân q-lần gần một điều kiện ban đầu cụ thể. Phân bố của những thời gian nhân q-lần này có liên quan đến tính có thể dự báo: chúng trực tiếp phản ánh thời gian kỳ vọng để tính không chắc chắn trong mỗi dự báo cụ thể đi qua một ngưỡng nhất định mà chúng ta quan tâm. Thời gian trung bình nhân đôi tính không chắc chắn đưa ra cùng một thông tin khi được tính trung bình trên những dự báo của mô hình này. Có một số duy nhất thì tiện, nhưng bình quân này có thể không áp dụng cho bất kỳ biểu diễn ban đầu nào.

Thời gian trung bình nhân đôi tính không chắc chắn là một thống kê hữu ích về tính có thể dự báo. Nhưng định nghĩa về sự hỗn độn toán học không được đưa ra trong mối quan hệ với thống kê về thời gian nhân đôi (hay nhân q-lần), mà đúng hơn, trong mối quan hệ với các ***lũy thừa Lyapunov*** [Lyapunov exponents], được định nghĩa dưới đây. Đây là một lý do tại sao hỗn độn và tính có thể dự báo không liên quan mật thiết như người ta thường nghĩ. So với lũy thừa Lyapunov dẫn đầu, thời gian nhân đôi trung bình cho chúng ta một chỉ báo thực tế hơn về tính có thể dự báo, nhưng nó thiếu một lợi thế chủ yếu, dù không thiết thực nhưng được các nhà toán học đánh giá cao và các lũy thừa Lyapunov lại có, như chúng ta sẽ thấy sau đây.

Tính hỗn độn được xác định về lâu dài. Sự tăng đồng đều theo số mũ của tính không chắc chắn được phát hiện trong những hệ thống hỗn độn đơn giản nhất. Thật ra, hiếm gặp sự tăng đồng đều ở những hệ thống hỗn độn chỉ biểu hiện ***sự tăng hữu hiệu theo số mũ*** [effective-exponential growth], hay còn gọi là sự tăng *bình quân theo số mũ* [exponential-on-average]. Ở đây, giá trị bình quân được lấy bằng giới hạn của một số lượng vô hạn các lần lặp. Con số chúng ta sử dụng để lượng hóa sự tăng này được gọi là *Lũy thừa Lyapunov* [Lyapunove Exponent]. Nếu sự tăng là thuần túy theo số mũ thay vì bình quân theo số mũ, chúng ta có thể lượng hóa nó là 2 lũy thừa λt, trong đó t là thời gian và λ là lũy thừa Lyapunov. Lũy thừa Lyapunov có đơn vị là bit trên lần lặp, và một lũy thừa dương nói lên số bit mà tính không chắc chắn của chúng ta đã tăng *bình quân* sau mỗi lần lặp. Một hệ thống có bao nhiêu hướng trong không gian biểu diễn thì có bấy nhiêu lũy thừa Lyapunov, và đó cũng chính là số phần tử tạo nên biểu diễn. Để cho tiện, chúng được liệt kê theo thứ tự giảm dần, và lũy thừa đầu tiên, lớn nhất, được gọi là *lũy thừa Lyapunov dẫn đầu* [leading Lyapunov exponent]. Trong những năm 1960, nhà toán học người Nga Valery Oseledets đã khẳng định các lũy thừa Lyapunov tồn tại ở một phạm vi rộng các hệ thống, và chứng minh rằng trong nhiều hệ thống, *hầu hết mọi* điều kiện ban đầu sẽ có cùng lũy thừa Lyapunov. Tuy lũy thừa Lyapunov được định nghĩa bằng cách bám theo quỹ đạo phi tuyến của một hệ thống trong không gian biểu diễn, chúng lại chỉ phản ánh sự tăng của tính không chắc chắn ở cực gần với quỹ đạo tham chiếu phi tuyến, và chừng nào tính không chắc chắn còn cực nhỏ, khó có khả năng nó phá hỏng những dự báo của chúng ta.

Tính toán lũy thừa Lyapunov đòi hỏi lấy giá trị bình quân trên một khoảng thời gian vô hạn và giới hạn sự chú ý vào những mức không chắc chắn cực nhỏ, nên việc ứng dụng những lũy thừa này trong định nghĩa kỹ thuật về sự hỗn độn toán học đặt gánh nặng lên việc nhận dạng một hệ thống là hỗn độn. Lợi thế là ở chỗ chính những tính chất này khiến lũy thừa Lyapunov là một chỉ báo vững chắc [*robust*] về hệ thống động lực ẩn bên dưới. Chúng ta có thể lấy không gian biểu diễn, kéo giãn nó, gập, xoắn nó, áp dụng bất kỳ sự biến dạng làm trơn nào, và những lũy thừa Lyapunov vẫn không đổi. Các nhà toán học đánh giá cao kiểu nhất quán ấy, nên lũy thừa Lyapunov giúp xác định một hệ thống có sự phụ thuộc nhạy hay không. Nếu lũy thừa Lyapunov dẫn đầu là dương, chúng ta có sự tăng *bình quân theo số mũ* của những mức không chắc chắn cực nhỏ, và một lũy thừa Lyapunov dương được xem là điều kiện cần cho tính hỗn độn. Tuy nhiên, chính những tính chất cho lũy thừa Lyapunov tính vững chắc lại khiến chúng tương đối khó đo lường trong những hệ thống toán học, và có lẽ không thể đo lường trong những hệ thống động lực vật lý. Một cách lý tưởng, điều đó nên giúp chúng ta thấy rõ sự khác biệt giữa những ánh xạ toán học và các hệ thống vật lý.

Dù không có lựa chọn nào khác thay cho tính vững chắc toán học của lũy thừa Lyapunov, lại có những con số xác đáng hơn để lượng hóa tính có thể dự báo. Biết thời gian trung bình để xe lửa đi từ Oxford đến trung tâm London vào tuần trước thì cung cấp nhiều thông tin về thời gian nó đi hôm nay hơn là lấy khoảng cách giữa Oxford và London chia cho tốc độ trung bình của mọi chuyến xe lửa từng chạy trong nước Anh. Lũy thừa Lyapunov cho chúng ta một tốc độ trung bình, trong khi các thời gian nhân đôi cho chúng ta thời gian trung bình. Do bản chất của chúng nên lũy thừa Lyapunov không được ứng dụng trong bất kỳ dự báo cụ thể nào.

Hãy xem lại bộ ánh xạ ở hình 8: làm thế nào chúng ta tính được lũy thừa Lyapunov hoặc thời gian nhân đôi của chúng? Chúng ta muốn lượng hóa sự giãn (hoặc co) diễn ra gần một quỹ đạo tham chiếu, nhưng nếu ánh xạ là phi tuyến, mức độ giãn sẽ tùy thuộc vào khoảng cách từ chúng ta tới quỹ đạo tham chiếu. Nếu đặt ra yêu cầu tính không chắc chắn phải cực gần quỹ đạo, sẽ tránh được khó khăn tiềm tàng này. Với những hệ thống một chiều, hoàn toàn có thể nhìn vào hệ số góc của ánh xạ tại mỗi điểm. Chúng ta muốn biết tính không chắc chắn tăng ra sao theo thời gian. Để kết hợp những mức tăng này, phải nhân các mức tăng riêng lẻ với nhau. Nếu thẻ tín dụng của tôi gấp đôi vào một ngày, gấp ba vào ngày tiếp theo, toàn bộ mức tăng là gấp sáu lần so với mức khởi đầu, không phải năm lần. Điều này có nghĩa là để tính mức tăng bình quân trên một lần lặp, chúng ta phải lấy ***bình quân hình học*** [geometric average]. Giả sử tính không chắc chắn tăng theo hệ số bằng ba trong lần lặp đầu tiên, rồi bằng hai, bằng bốn, bằng một phần ba, và bằng bốn: xét toàn bộ, đó là một hệ số bằng 32 trên năm lần lặp, nên mức tăng bình quân là hai trên một lần lặp, vì căn bậc năm của 32 là 2, hay nói cách khác: 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32. Chúng ta không quan tâm đến đến bình quân số học, hay 32 chia 5 bằng 6,4. Tính không chắc chắn của chúng ta *chưa bao giờ* tăng nhiều chừng đó trong bất kỳ ngày nào. Cũng lưu ý, tuy có mức tăng trung bình theo hệ số bằng hai mỗi ngày, những hệ số thực tế là 3, 2, 4, 1/3, và 4: đó là một sự tăng không đồng đều, và có một ngày tính không chắc chắn thực ra giảm đi. Nói cách khác, nếu có thể đoan chắc về chất lượng của những dự báo trong một hệ thống hỗn độn, và nếu có thể đánh cuộc những mức khác nhau vào những ngày khác nhau, trong tương lai sẽ có những thời điểm chúng ta tự tin *hơn nhiều*. Một điều hoang đường khác sẽ mất đi: hỗn độn không ám chỉ rằng dự báo là vô vọng. Thực ra, nếu bạn cược với một người tin chắc rằng dự báo sự hỗn độn trước sau đều vô vọng, bạn ở một vị thế có thể dạy họ.

Một số trường hợp đơn giản nhất (và những ví dụ thường gặp nhất) về hỗn độn có hệ số góc không đổi, và thực tế này đã dẫn tới khái quát hóa quá mức rằng hỗn độn là luôn luôn không thể dự báo. Nhìn lại sáu hệ thống hỗn độn ở hình 8, chúng ta thấy bốn trong số chúng (Ánh xạ dịch chuyển, Ánh xạ lều, Ánh xạ chia bốn, Ánh xạ lều nhân ba) có độ lớn của hệ số góc không đổi. Mặt khác, trong Ánh xạ logistic và Ánh xạ

Moran-Ricker, hệ số góc thay đổi rất nhiều theo những giá trị khác nhau của X. Một hệ số góc với giá trị tuyệt đối lớn hơn 1 ám chỉ tính không chắc chắn giảm đi, nên Ánh xạ logistic biểu thị tính không chắc chắn tăng mạnh ở những giá trị X gần 0 hoặc gần 1, và tính không chắc chắn giảm ở những giá trị X gần ½. Tương tự, Ánh xạ Moran-Ricker biểu thị tính không chắc chắn tăng ở gần 0 và những giá trị ở gần 1, khi hệ số góc cũng lớn, nhưng giảm đi ở những giá trị giữa và cao của X - nơi hệ số góc gần bằng 0.

Làm thế nào chúng ta xác định một giá trị bình quân mở rộng đến tương lai vô hạn? Như nhiều cái khó khác của toán học, cách dễ nhất để giải bài toán này là lừa gạt. Một lý do tại sao Ánh xạ dịch chuyển và Ánh xạ lều quá phổ biến trong động lực phi tuyến là, tuy các đường đi là hỗn độn, sự tăng của tính không chắc chắn lại như nhau ở mỗi biểu diễn. Đối với Ánh xạ dịch chuyển, từng mức không chắc chắn cực nhỏ sẽ tăng lên theo hệ số bằng hai ở từng lần lặp. Nên nhiệm vụ có vẻ khó khăn là tính giá trị trung bình khi thời gian tiến tới vô tận trở nên không đáng kể: nếu tính không chắc chắn tăng theo hệ số bằng hai ở mỗi lần lặp, vậy bình quân nó tăng theo hệ số bằng hai, và Ánh xạ dịch chuyển có một lũy thừa Lyapunov bằng một *bit* trên một lần lặp. Tính toán lũy thừa Lyapunov của Ánh xạ lều cũng hầu như dễ dàng: mức tăng hoặc theo hệ số 2, hoặc theo hệ số -2 tùy vào chúng ta ở nửa nào của "cái lều". Dấu trừ không ảnh hưởng tới độ lớn của mức tăng, nó chỉ cho thấy hướng đã bị lật từ trái sang phải, và chúng ta có thể bỏ qua điều này. Một lần nữa, chúng ta có một *bit* trên mỗi lần lặp. Mánh khóe tương tự cũng áp dụng cho Ánh xạ lều nhân ba, nhưng nó có hệ số góc là ba, và một lũy thừa Lyapunov xấp xỉ 1,58 *bit* trên mỗi lần lặp (giá trị chính xác là $\log_2(3)$). Tại sao chúng ta cứ tiếp tục lấy logarithm thay vì chỉ nói tới "các hệ số tăng" (các số Lyapunov)? Và tại sao là logarithm cơ số 2? Đây là một lựa chọn cá nhân, thường được lý giải bởi mối liên hệ của nó với số học nhị phân, ứng dụng của nó trong máy tính, sở thích nói "một *bit* trên mỗi lần lặp" thay vì "khoảng 0,693147 *nat** trên mỗi lần lặp", và thực tế rằng nhân hai thì khá dễ đối với con người.

Đồ thị của Ánh xạ logistic đầy đủ biểu thị một hình parabola, nên mức tăng ở những biểu diễn khác nhau sẽ khác, và mánh khóe lấy giá trị trung bình của một hằng số có vẻ không áp dụng được. Làm thế nào chúng ta tính ra giới

---

* *Natural unit of information,* đơn vị thông tin dựa trên logarithm tự nhiên và lũy thừa *e* (bằng giới hạn của $(1+1/n)^n$ khi n tiến tới vô cực), khác với *bit* dựa trên lũy thừa 2 và logarithm cơ số 2. (ND)

hạn [khi thời gian] tiến tới tương lai vô tận? Nhà vật lý học đơn giản sẽ khởi động một máy tính, tính lũy thừa Lyapunov theo thời gian hữu hạn cho nhiều biểu diễn khác nhau. Cụ thể, nhà toán học sẽ tính sự tăng bình quân hình học trên hai lần lặp với các giá trị khác nhau của X, sau đó tính sự phân bố tương ứng với ba lần lặp, rồi bốn lần lặp... và cứ như vậy. Nếu sự phân bố này đồng quy về một giá trị duy nhất, có thể xem nó như một giá trị ước tính cho lũy thừa Lyapunov, miễn là máy tính không phải chạy quá lâu đến mức trở nên không đáng tin cậy. Nhưng hóa ra, phân bố này hội tụ nhanh hơn so với sự gợi ý của Quy luật số lớn**. Nhà vật lý học vui mừng với giá trị ước tính này, vì nó gần bằng 1 *bit* trên mỗi lần lặp.

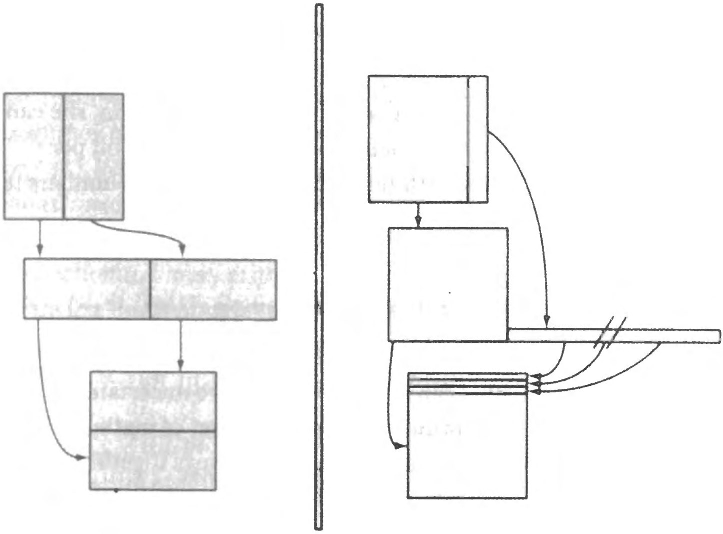
Dĩ nhiên, nhà toán học sẽ không dám mơ đến một phép ngoại suy như vậy, bởi không thấy sự tương tự nào giữa một số lượng hữu hạn những tính toán bằng số, mà từng cái là không chính xác, với một phép toán chính xác mở rộng đến tương lai vô tận. Từ quan điểm của nhà toán học, giá trị của lũy thừa Lyapunov ở hầu

** Một định lý trong lý thuyết xác suất, mô tả kết quả thực hiện cùng một thí nghiệm sau một số lớn lần thực hiện. Theo quy luật này, trung bình các giá trị nhận được từ một số lớn các phép thử nên gần với giá trị kỳ vọng, và có xu hướng ngày càng gần hơn sau nhiều phép thử hơn.

hết các giá trị của α vẫn chưa được biết, kể cả ngày nay. Nhưng Ánh xạ logistic đầy đủ là đặc biệt, và nói lên mánh khóe thứ hai của nhà toán học: thay X bằng sin θ trong quy tắc định nghĩa Ánh xạ logistic đầy đủ, và sử dụng một vài đồng dạng nào đó từ lượng giác, nhà toán học có thể cho thấy Ánh xạ logistic đầy đủ *là* Ánh xạ dịch chuyển. Vì lũy thừa Lyapunov không thay đổi dưới thủ thuật toán học này, nên nhà toán học có thể chứng minh lũy thừa Lyapunov thực sự bằng một *bit* trên mỗi lần lặp, và giải thích sự vi phạm Quy luật số lớn trong một chú thích cuối trang.

Lũy thừa Lyapunov trong số chiều cao hơn

Nếu biểu diễn của mô hình có hơn một phần tử, tính không chắc chắn ở một trong các phần tử có thể góp phần vào tính không chắc chắn tương lai ở những phần tử khác. Điều này đưa đến cả một loạt những vấn đề toán học mới, bởi lẽ trình tự nhân các thứ với nhau trở nên quan trọng. Đầu tiên, chúng ta sẽ tránh những phức tạp này bằng cách xét những ví dụ trong đó tính không chắc chắn ở những phần tử khác nhau không trộn lẫn vào nhau, nhưng hãy cẩn thận, không được quên rằng đây là những trường hợp rất đặc biệt!



Hình 21. Sơ đồ trình bày diễn tiến của những điểm trong hình vuông dưới một lần lặp của Ánh xạ thợ làm bánh mì (trái) và Ánh xạ thợ bánh mì học việc (phải).

Không gian biểu diễn của ***Ánh xạ thợ làm bánh mì*** [Baker's Map]* có hai phần tử x và y, được trình bày ở hình 21. Nó xạ ảnh một hình vuông hai chiều lên chính nó một cách chính xác theo quy tắc:

---

* Tên gọi được đặt theo một thao tác nhào bột mà người làm bánh mì áp dụng cho bột nhão: bột nhão được cắt đôi, hai nửa được chồng lên nhau và nén xuống.

Nếu x nhỏ hơn ½:

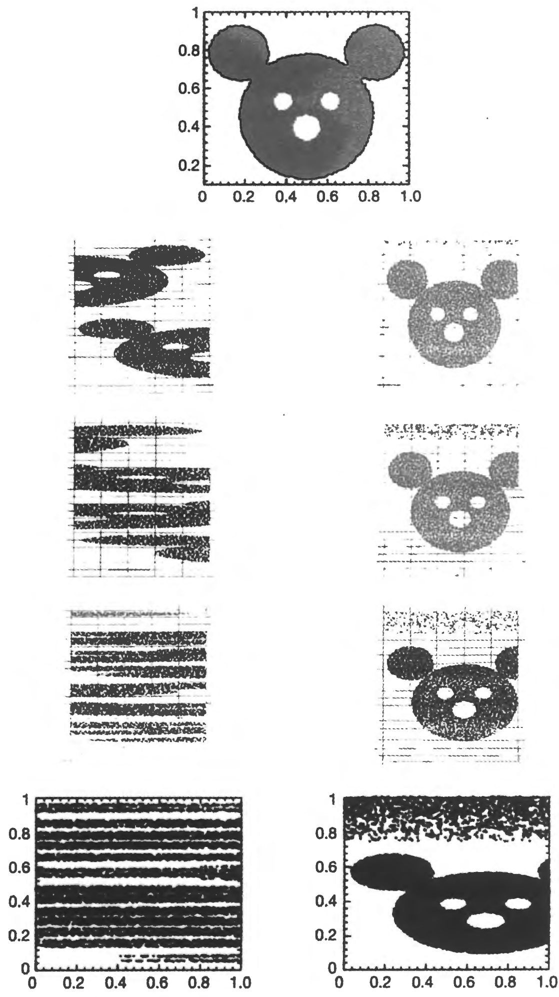
Nhân x với 2 để có giá trị mới của x, và chia y cho 2 để có giá trị mới của y.

Nếu không:

Nhân x với 2 rồi trừ 1 để có giá trị mới của x, và chia y cho 2 rồi cộng ½ để có giá trị mới của y.

Trong Ánh xạ thợ làm bánh mì, bất kỳ tính không chắc chắn nào trong phần tử trục ngang (x) của trạng thái biểu diễn sẽ nhân đôi ở mỗi lần lặp, còn trục đứng (y) bị chia đôi. Nó đúng ở mỗi bước lặp, nên nó cũng đúng xét bình quân. Thời gian trung bình nhân đôi tính không chắc chắn là một lần lặp, và Ánh xạ thợ làm bánh mì có một lũy thừa Lyapunov bằng 1 bit trên mỗi lần lặp, một lũy thừa bằng -1 *bit* trên mỗi lần lặp. Lũy thừa dương ứng với tính không chắc chắn tăng lên, lũy thừa âm ứng với tính không chắc chắn giảm đi. Đối với mỗi biểu diễn, có một hướng gắn liền với từng lũy thừa. Trong trường hợp đặc biệt này, các hướng là như nhau cho mọi biểu diễn, do vậy chúng không bao giờ trộn lẫn tính không chắc chắn ở x với tính không chắc chắn ở y. Bản thân Ánh xạ thợ làm bánh mì đã được xây dựng cẩn thận để tránh những khó khăn do tính không chắc chắn ở một phần tử góp phần vào tính không chắc chắn ở một phần tử khác. Tất nhiên, trong *hầu hết mọi* ánh xạ hai chiều, những mức không chắc chắn hòa trộn với nhau, nên thông thường chúng ta không thể tính được bất kỳ lũy thừa Lyapunov dương nào!

Từ những đồ thị bên trái của hình 22, có thể thấy tại sao người ta cho rằng dự báo sự hỗn độn là vô vọng. Các đồ thị trình bày diễn tiến của một tập hợp hình chuột qua nhiều bước lặp của ánh xạ. Nhưng hãy nhớ ánh xạ này là một trường hợp rất đặc biệt: người thợ làm bánh mì giả định của chúng ta có kỹ năng nhào bột rất khéo léo, có thể kéo giãn bột nhão một cách đồng đều theo hệ số bằng hai và theo phương ngang, nên nó co lại theo hệ số bằng hai theo phương dọc trước khi đưa chỗ bột trở lại hình vuông đơn vị. Chúng ta nên so sánh Ánh xạ thợ làm bánh mì với nhiều thành viên khác nhau của nhóm Ánh xạ thợ bánh mì học việc [Baker's Apprentice Maps]. Những thợ bánh mì học việc giả định của chúng ta ít đồng đều hơn, họ kéo quá mức một phần nhỏ của chỗ bột nhão sang bên phải hình vuông, trong khi hầu như không kéo phần lớn chỗ bột nhão sang bên trái, như chúng ta thấy ở hình 21. Thật may, mọi thành viên của nhóm Học việc đủ khéo léo để không trộn tính không chắc chắn ở một phần tử này vào một phần tử khác, nên chúng ta có thể tính toán các thời gian nhân đôi và lũy thừa Lyapunov của bất kỳ thành viên nào.



Hình 22. Một tập hợp hình chuột của các biểu diễn ban đầu (trên cùng) và bốn đồ thị mỗi bên, từng cặp cho thấy diễn tiến của tập hợp này dưới Ánh xạ thợ làm bánh mì (trái) và Ánh xạ thợ bánh mì học việc thứ tư (phải).

Hóa ra, mỗi Ánh xạ thợ bánh mì học việc có một lũy thừa Lyapunov dẫn đầu lớn hơn của Ánh xạ thợ làm bánh mì. Nên *nếu* chúng ta chọn lũy thừa Lyapunov dẫn đầu làm đo lường về sự hỗn độn, thì mỗi Ánh xạ thợ bánh mì học việc đều "hỗn độn hơn" Ánh xạ thợ làm bánh mì. Kết luận này có thể gây ra đôi chút khó chịu nếu được xem xét dưới ánh sáng của hình 22, cho thấy diễn tiến của một tập hợp các điểm dưới Ánh xạ thợ làm bánh mì (trái) so với Ánh xạ thợ bánh mì học việc thứ tư (phải). Thời gian nhân đôi trung bình của một Ánh xạ thợ bánh mì học việc có thể lớn hơn nhiều so với Ánh xạ thợ làm bánh mì, dù lũy thừa Lyapunov của nó cũng lớn hơn lũy thừa của Ánh xạ thợ làm bánh mì. Điều này đúng đối với cả nhóm Ánh xạ thợ bánh mì học việc, và chúng ta có thể tìm được một Ánh xạ thợ bánh mì học việc với thời gian nhân đôi trung bình lớn hơn bất kỳ con số nào mà người ta muốn nêu ra. Có lẽ chúng ta nên xem xét lại mối liên hệ giữa sự hỗn độn và tính có thể dự báo?

Lũy thừa Lyapunov dương với những mức không chắc chắn giảm

Chừng nào tính không chắc chắn còn nhỏ hơn con số nhỏ nhất chúng ta có thể nghĩ ra, nó hầu như không thể đặt ra giới hạn thực tiễn nào cho những dự báo, và ngay khi tính không chắc chắn tăng đến mức đo lường được, diễn tiến của nó không còn được phản ánh bởi lũy thừa Lyapunov theo bất cứ cách nào nữa. Ngay trong trường hợp cực nhỏ, các Ánh xạ thợ bánh mì học việc cũng cho thấy lũy thừa Lyapunov là chỉ báo sai lầm về tính có thể dự báo, bởi lẽ mức độ tăng của tính không chắc chắn có thể thay đổi với biểu diễn hiện thời của hệ thống. Và theo hướng tốt hơn: trong hệ thống Lorenz 1963 cổ điển, có thể chứng minh rằng có những vùng của không gian biểu diễn trong đó mọi mức không chắc chắn *giảm đi* cùng một lúc. Nếu được lựa chọn thời điểm nào đặt cược vào một dự báo, sự đặt cược khi đi vào một vùng như vậy sẽ tăng xác suất thắng của bạn. Dự báo các hệ thống hỗn độn không hề là vô vọng. Thậm chí, việc đánh cược với một người tin một cách ngây thơ rằng điều đó là vô vọng có thể đem lại cơ may thắng cược cho bạn.

Chúng ta kết thúc bàn luận này về lũy thừa Lyapunov với một lời cẩn trọng bổ sung. Mặc dù một hướng với tính không chắc chắn không tăng hay giảm ám chỉ một lũy thừa Lyapunov bằng không, điều ngược lại không đúng: một lũy thừa Lyapunov bằng không không có nghĩa là một hướng không tăng! Hãy nhớ lại bàn luận về số mũ trong câu chuyện những con thỏ của Fibonacci: mức tăng nhanh bằng bình phương thời gian cũng còn chậm hơn mức tăng theo số mũ, và sẽ dẫn đến một lũy thừa Lyapunov bằng không. Đây là một lý do tại sao các nhà toán học đã tỏ ra thông thái rởm khi cố tính giới hạn trong trường hợp thời gian tăng đến tương lai vô tận: nếu xét một thời kỳ hữu hạn, *bất kỳ* sự tăng nào cũng đưa đến một lũy thừa Lyapunov dương - sự tăng theo số mũ, tuyến tính hay thậm chí sự tăng chậm hơn tuyến tính cũng sẽ dẫn đến một mức tăng tính không chắc chắn lớn hơn 1 trên bất kỳ thời gian hữu hạn nào, và logarithm của bất kỳ số nào lớn hơn 1 cũng là dương. Tính toán thống kê của sự hỗn độn sẽ cho thấy khá rắc rối.

Hiểu động lực của những mức không chắc chắn thích hợp

Như chúng ta đã lưu ý, một mức không chắc chắn cực nhỏ không thể gây ra cho chúng ta nhiều khó khăn trong dự báo. Một khi nó trở nên đo lường được, chi tiết về độ lớn chính xác của nó và vị trí của biểu diễn trong không gian biểu diễn bắt đầu có tác động. Đến nay, các nhà toán học chưa tìm ra phương pháp dễ dàng nào để truy những mức không chắc chắn nhỏ nhưng nhận thấy được này, mặc dù chắc chắn chúng liên quan nhiều nhất đến dự báo trong thế giới thực. Điều tốt nhất chúng ta có thể làm là lấy một mẫu các biểu diễn ban đầu - được gọi là một tập hợp - và khiến tập hợp này nhất quán cả với động lực của mô hình lẫn nhiễu trong quan sát, sau đó xem tập hợp này phân tán ra sao trong tương lai. Với con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta, thế là đủ: sử dụng mô hình hoàn hảo của nó về hệ thống và nhiễu, những quan sát có nhiễu của nó về các biểu diễn trước đây cho đến quá khứ xa xôi, và khả năng tiếp cận nguồn lực tính toán vô hạn, tập hợp của nó sẽ phản ánh chính xác xác suất của những sự kiện tương lai. Nếu một phần tư số thành phần trong tập hợp của nó dự báo ngày mai có mưa, thế thì thật sự có 25% khả năng mưa vào ngày mai, xét những quan sát có nhiễu mà nó có. Giảm nhiễu sẽ tăng năng lực của nó trong việc xác định cái gì có khả năng xảy ra. Sự hỗn độn không là rào cản đối với nó. Nó không chắc chắn về hiện tại, nhưng có thể phóng chiếu tính không chắc chắn ấy vào tương lai một cách chính xác: ai có thể đòi hỏi hơn thế chứ? Tuy nhiên, những mô hình của chúng ta lại không hoàn hảo, nguồn lực tính toán thì giới hạn: ở chương 9, chúng ta so sánh sự thiếu hụt mà chúng ta phải đối mặt với sự không chắc chắn mà con quỷ có thể chấp nhận.

Cái sở thú phi tuyến không chỉ chứa sự hỗn độn. Nhưng không nhất thiết là với tính không chắc chắn nhỏ hơn, hành vi sẽ thuần phục hơn.

Có những thứ tệ hơn sự hỗn độn: rất có thể khi tính không chắc chắn nhỏ hơn, nó sẽ tăng nhanh hơn, dẫn tới sự bùng nổ những mức không chắc chắn cực nhỏ thành các tỉ lệ đo được chỉ sau một thời gian hữu hạn. Điều này nghe không phải quá lạ lùng: cho đến giờ câu hỏi mở vẫn là liệu những phương trình căn bản của động lực học chất lỏng có thể hiện dáng điệu tệ-hơn-hỗn-độn hay không - đây là một trong số ít ỏi những câu hỏi toán học được gắn kèm giải thưởng Nobel về vật lý!

7

Số thực, những quan sát thực, và máy tính

> Nhà toán học định nghĩa số vô tỷ rất cẩn thận. Nhà vật lý học không bao giờ gặp những con số như vậy... Nhà toán học rùng mình với tính không chắc chắn và cố gắng phớt lờ các sai số thí nghiệm.
>
> Leon Brillouin (1964)*

Trong chương này, chúng ta khảo sát mối quan hệ giữa các số trong mô hình toán học, các số chúng ta quan sát khi đo lường trong thế giới thực, và các số được sử dụng bên trong một máy tính kỹ thuật số. Nghiên cứu về hỗn độn đã làm sáng tỏ tầm quan trọng của việc

---

* Leon Nicolas Brillouin (1889 - 1969), nhà vật lý Pháp.

phân biệt ba loại số này. Thế nào là những loại số khác nhau?

Các số tròn trịa là số nguyên; kết quả đo lường của những thứ như "số thỏ trong vườn nhà tôi" dĩ nhiên cũng là số nguyên, và máy tính có thể thực hiện những phép toán hoàn hảo với số nguyên chừng nào chúng không trở nên quá lớn. Nhưng còn những thứ như "chiều dài cái bàn này", hay "nhiệt độ ở sân bay Heathrow"? Chúng có vẻ không nhất thiết là số nguyên, và xu hướng tự nhiên của chúng ta là nghĩ về chúng như được biểu diễn bởi những số thực, những số có thể có chuỗi ký tự dài bất tận về bên phải dấu thập phân, hoặc số *bit* dài bất tận về bên phải điểm nhị phân. Từ thời cổ đại, người ta đã tranh luận liệu những số thực này có tồn tại trong thế giới thực không. Một điều rõ ràng là khi lấy "dữ liệu", chúng ta chỉ "giữ" những giá trị là số nguyên. Nếu đo "chiều dài của cái bàn này" và chúng ta viết ra là 1,370, số đo ấy thoạt nhìn có vẻ không phải số nguyên, nhưng có thể chuyển nó thành một số nguyên bằng cách nhân với 1000. Bất kỳ khi nào chỉ có thể đo lường một đại lượng như chiều dài hay nhiệt độ đến một độ chính xác hữu hạn - mà thực tiễn luôn là như vậy - sự đo lường đều có thể được biểu diễn bởi một số nguyên. Và thật ra, sự đo lường ngày nay hầu như luôn được thực hiện theo cách ấy, bởi chúng ta có xu hướng ghi nhận và thao tác dữ liệu bằng cách sử dụng máy tính, trong khi máy tính *luôn* lưu trữ các con số như số nguyên. Điều này phần nào nói lên sự tách biệt giữa quan niệm vật lý của chúng ta về chiều dài và những đo lường chiều dài thực tế, và có sự tách biệt tương tự giữa những mô hình toán học, vốn xem xét các số thực, và những mô phỏng máy tính của chúng, vốn chỉ cho phép số nguyên.

Dĩ nhiên, một nhà vật lý học thực thụ sẽ không bao giờ nói chiều dài của cái bàn là 1,370. Người đó sẽ nói đại loại chiều dài là 1,370 ± 0,005, với mục đích lượng hóa sự không chắc chắn do nhiễu. Ngầm định trong điều này là một mô hình nhiễu. Các số ngẫu nhiên từ đường cong hình chuông chắc chắn là mô hình nhiễu thường gặp nhất. Người ta biết cách đưa vào những thứ như "± 0,005" để qua được các kỳ thi ở trường. Nó thường được nhìn nhận như một sự phiền toái, nhưng thật sự nó có nghĩa là gì? Những phép đo của chúng ta đang đo lường cái gì? Liệu có một chiều dài Đúng của cái bàn hoặc nhiệt độ Đúng ở sân bay, chẳng qua bị che mờ bởi nhiễu và bị cắt bỏ các số hạng trong quá trình ghi nhận? Hay nó là một sự hư cấu, và niềm tin rằng nên có một con số chính xác nào đó chỉ là do khoa học tạo ra? Nghiên cứu về hỗn độn đã làm sáng tỏ vai trò của tính không chắc chắn và nhiễu trong việc đánh giá những lý thuyết bằng cách gợi ý những phương pháp mới để xem những giá trị Đúng như vậy có tồn tại không. Hiện giờ, chúng ta sẽ cho rằng giá trị Đúng có đó, chẳng qua chúng ta không thể thấy nó rõ ràng.

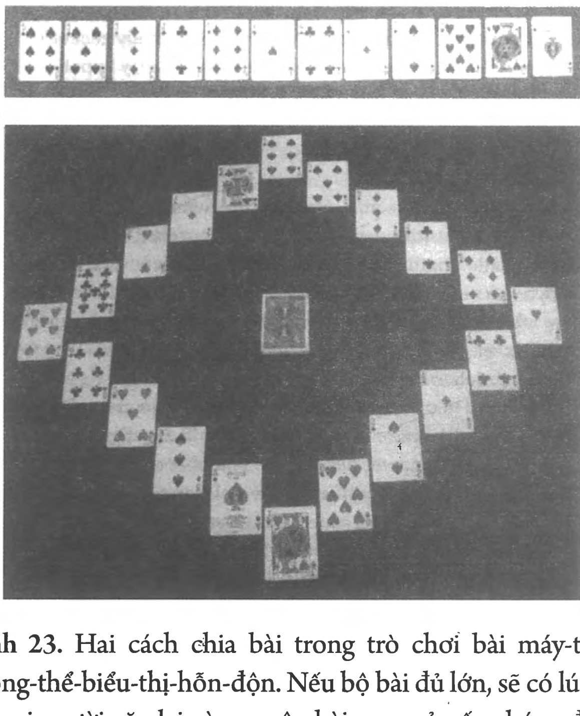
Không có gì thật sự quan trọng

Vậy chính xác thế nào là một quan sát? Hãy nhớ lại chuỗi thời gian đầu tiên của chúng ta, số thỏ hàng tháng trong khu vườn tưởng tượng của Fibonacci. Trong trường hợp cụ thể này, chúng ta biết tổng số thỏ trong vườn. Nhưng trong hầu hết những nghiên cứu về động lực học quần thể, lại không có thông tin đầy đủ như vậy. Lấy thí dụ, chúng ta đang nghiên cứu một quần thể chuột đồng ở Phần Lan. Chúng ta đặt bẫy, kiểm tra hàng ngày, giải phóng những con mắc bẫy, và ghi nhận một chuỗi thời gian hàng ngày về số chuột đồng bị mắc bẫy. Bằng cách nào đó, con số này có liên quan đến số chuột đồng trên kilomet vuông ở Phần Lan, nhưng chính xác là thế nào? Giả sử hôm nay chúng ta quan sát thấy không có con chuột nào trong bẫy. "Không có" này nghĩa là gì? Không có chuột đồng trong khu rừng này? Không có chuột đồng ở Scandinavia? Chuột đồng đã tuyệt chủng? Không có chuột trong bẫy có thể là bất kỳ hoặc không là trường hợp nào trong số kể trên, do vậy minh họa hai kiểu không chắc chắn mà chúng ta phải đương đầu khi xem xét mối liên hệ giữa những đo lường và mô hình. Thứ nhất là nhiễu quan sát đơn giản: ví dụ đếm sai số chuột đồng trong bẫy, hoặc thấy bẫy đã đầy nên bỏ ngỏ khả năng ngày hôm đó có thể đã đếm được nhiều chuột đồng hơn nếu sử dụng bẫy lớn hơn. Thứ hai được gọi là *sai số biểu diễn* [representation error]: những mô hình xét mật độ quần thể trên kilomet vuông, nhưng chúng ta đang đo lường số chuột trong một cái bẫy, nên sự đo lường không biểu diễn biến số mà mô hình sử dụng. Liệu đây là một khiếm khuyết của mô hình hay của đo lường?

Nếu đưa số sai vào mô hình, xem như chúng ta sẽ lấy ra từ mô hình một số sai: đầu vào là rác, kết quả trả về là rác. Có vẻ các mô hình đang yêu cầu một *kiểu* số, trong khi những quan sát đang đưa ra một kiểu số khác có nhiễu. Trong trường hợp dự báo thời tiết, với những biến số mục tiêu - nhiệt độ, áp suất, độ ẩm - được xem là số thực, chúng ta không thể mong những quan sát phản ánh chính xác giá trị thực. Điều này gợi ý chúng ta tìm những mô hình có động lực *nhất quán* với các quan sát thay vì đưa các quan sát và các biểu diễn của mô hình trở nên ít nhiều thành cùng một thứ, rồi cố gắng đo khoảng cách giữa một biểu diễn tương lai nào đó của mô hình và quan sát mục tiêu tương ứng. Mục đích của việc dự báo những hệ thống tuyến tính là tối thiểu hóa khoảng cách này, gọi là sai số dự báo. Khi dự báo những hệ thống phi tuyến, điều quan trọng là phân biệt những yếu tố khác nhau được ràng buộc trong con số này, gồm những mức không chắc chắn trong quan sát, sự cắt bớt số hạng trong đo lường, sự khác nhau giữa những mô hình toán học, những mô phỏng máy tính của chúng và bất kỳ thứ gì thực tế phát sinh ra dữ liệu. Trước hết, chúng ta sẽ xem chuyện gì xảy ra khi cố gắng đưa động lực học vào một máy tính kỹ thuật số.

Máy tính và hỗn độn

Xin nhắc lại rằng ba điều kiện cho hỗn độn toán học là tính tất định, sự phụ thuộc nhạy, và sự tái lặp. Các mô hình máy tính cùng lắm là tất định. Sự phụ thuộc nhạy phản ánh động lực của những thứ cực nhỏ, nhưng ở một máy tính bất kỳ, có một giới hạn đối với khoảng cách gần nhau giữa hai số, quá giới hạn đó máy tính không thấy sự khác biệt và sẽ xem chúng là một con số. Không có những thứ cực nhỏ thì không có hỗn độn toán học. Lý do thứ hai là máy tính không thể biểu thị sự hỗn độn phát sinh từ việc chỉ có một dung lượng bộ nhớ hữu hạn trong bất kỳ máy tính nào: mỗi máy tính có một số hữu hạn các *bit*, do vậy chỉ có một số hữu hạn những trạng thái bên trong khác nhau, nên cuối cùng máy tính phải trở lại một trạng thái nó đã từng trải qua, và sau đó do tính tất định nên nó đơn giản chạy theo vòng tròn, lặp đi lặp lại mãi mãi hành vi trước đó. Không thể tránh được số phận này trừ phi một người hoặc lực bên ngoài nào đó can thiệp vào động lực tự nhiên của bản thân máy tính. Một trò chơi bài đơn giản sẽ minh hoạ rõ ràng điểm này.



Hình 23. Hai cách chia bài trong trò chơi bài máy-tính-không-thể-biểu-thị-hỗn-độn. Nếu bộ bài đủ lớn, sẽ có lúc tất cả mọi người gặp lại cùng quân bài ngay cả nếu chúng được sắp thành hàng như trong khung hình bên trên.

Trò chơi bài và chương trình máy tính

Hãy yêu cầu một người bạn chọn một con số bí mật, giả sử giữa 1 và 8, rồi xếp một bộ bài như trong hình 23. Quân bài hình tính là 10, quân át tính là 1. Yêu cầu người bạn đếm theo con số bí mật của mình, tới quân bài nào thì lấy số của quân bài đó làm con số mới và tiếp tục đếm tới. Nếu con số ban đầu là 1, người đó ở sáu pích, và với số mới là sáu, người đó đếm tới bốn nhép. Nếu số ban đầu là ba, người đó tới ba rô, sau đó đếm tới át cơ, v.v... Hãy tự mình thử theo hình 23 và dừng lại khi bạn gặp J cơ. Làm sao tôi biết bạn sẽ gặp J cơ? Vì cùng lý do mà máy tính không thể biểu thị sự hỗn độn. Mọi người đều tới J cơ*.

Điều này liên quan gì đến máy tính? Một máy tính số là một cái máy có trạng thái hữu hạn: chỉ có một số giới hạn các bit bên trong nó để định nghĩa trạng thái hiện thời của nó. Mã hóa trong trạng thái hiện thời của cái máy là quy tắc xác định trạng thái nào xảy ra tiếp theo. Trong trò chơi bài, có mười giá trị có thể có ở mỗi vị trí. Nếu người chơi ở hai quân bài khác nhau tiến tới cùng quân bài, từ đó trở đi họ sẽ giống hệt nhau. Trừ phi hết sức cẩn thận, nếu không những trạng thái gần

* Đây là cách đếm ứng với hàng trên, từ trái qua phải. Số bí mật là một thì ứng với quân bài ở vị trí thứ nhất (sáu bích), nếu số bí mật là bốn chẳng hạn thì đếm từ sáu bích trở đi, đến quân thứ bốn dừng lại, đây là quân hai nhép, nên con số mới là hai. Lại đếm tiếp đến hai thì gặp quân át nhép là một... Về cách sắp bài theo hình tròn, xem ghi chú tiếp theo.

nhau trong một máy tính sẽ sụp đổ theo cùng cách như vậy. Một máy tính hiện đại tuy có nhiều lựa chọn hơn nhưng vẫn chỉ là một số hữu hạn, nên cuối cùng nó sẽ đụng phải một định dạng (một trạng thái bên trong) mà nó đã gặp trước đây, và sau đó, nó mãi mãi tuần hoàn theo cùng vòng lặp. Trò chơi bài cũng hoạt động theo cách tương tự: mọi người khởi đầu với con số ban đầu của riêng họ, tiến tới con số mới và cứ thế. Nhưng một khi hai trong số những đường đi này đồng quy vào cùng một quân bài, chúng sẽ ở bên nhau mãi mãi. Với những quân bài cụ thể trên bàn, tất cả mọi người sẽ gặp J cơ. Sẽ không ai tới át pích trừ phi họ khởi đầu từ đó. Để thấy điều này, hãy thử bắt đầu với mỗi giá trị. Nếu chọn một, bạn tới sáu, sau đó tới bốn, rồi J. Nếu chọn hai, bạn tới năm, bốn, và J. Chọn ba, bạn tới ba, át, bốn, và J. Chọn bốn, bạn tới hai, át, bốn, và J. Chọn năm, bạn tới sáu và J. Chọn sáu, bạn tới át, bốn, J. Chọn bảy, bạn tới bốn, và J. Chọn tám, bạn tới át, hai, và J. Mọi giá trị đều dẫn tới J. Đặt các quân bài theo một vòng tròn và chúng ta có một cỗ máy với trạng thái hữu hạn, trong đó mọi điểm khởi đầu phải dẫn tới một vòng lặp định kỳ, nhưng có nhiều hơn một vòng lặp*(*).

Bằng cách chiếu các quân bài trên một màn hình, bạn có thể sử dụng minh họa này cho nhiều người xem. Tự mình lấy một con số, chia bài cho đến khi bạn nghĩ tất cả mọi người đã quy về một quân. Sau đó, hãy yêu cầu

* Xuất phát từ bất kỳ quân bài nào, với bất kỳ số bí mật ban đầu nào, mọi người sẽ gặp J cơ hoặc K nhép, nghĩa là có hai vòng lặp tuần hoàn theo số.

mọi người giơ tay nếu họ tới J cơ. Khán giả sẽ rất ngạc nhiên khi thấy họ đều ở cùng quân bài. Họ sẽ đồng quy về cùng quân bài nhanh hơn nếu bạn giới hạn bộ bài vào những giá trị nhỏ. Nếu sẵn sàng xếp bài theo cách gian lận để đạt sự đồng quy nhanh hơn, bạn sẽ xếp bài theo trật tự nào?

Điều này có ngụ ý gì cho những mô phỏng máy tính của Ánh xạ logistic? Trong phiên bản toán học của ánh xạ, chuỗi thời gian khi lặp hầu hết mọi giá trị của X giữa 0 và 1 sẽ không bao giờ chứa hai lần cùng giá trị của X, dù chúng ta đi tới bao nhiêu lần lặp. Khi số lần lặp tăng lên, giá trị nhỏ nhất quan sát được của X cho đến lúc ấy sẽ ngày càng gần 0, nhưng không bao giờ thực sự đạt đến 0. Đối với mô phỏng máy tính của Ánh xạ logistic, có khoảng 2^{60} (khoảng một triệu triệu triệu) các giá trị khác nhau của X nằm giữa 0 và 1, nên chuỗi thời gian từ máy tính cuối cùng phải chứa đựng hai giá trị hoàn toàn giống nhau của X, và bị kẹt trong một vòng lặp bất tận. Khi chuyện này xảy ra, giá trị nhỏ nhất của X sẽ không giảm nữa, và bất kỳ tính toán nào theo vòng lặp này, dù là tính giá trị trung bình của X hay lũy thừa Lyapunov của ánh xạ, sẽ phản ánh những đặc điểm của vòng lặp cụ thể ấy, không phải của ánh xạ toán học. Đường đi của máy tính đã trở nên *tuần hoàn về số*[digitally periodic]*, bất kể hệ thống toán học đã như thế nào. Mọi máy tính kỹ thuật số đều như vậy. Máy tính không thể biểu thị hỗn độn.

Có thể có nhiều hơn một vòng lặp tuần hoàn về số: hãy xáo một bộ bài và đặt một số quân vào một vòng tròn lớn, sao cho quân bài đầu tiên nối đuôi quân bài cuối cùng được chia. Việc quyết định mỗi quân bài rốt cục thuộc về vòng lặp nào sẽ tạo ra một danh sách tất cả những vòng lặp. Cái nào lớn hơn: số quân bài thực tế ở trong các vòng lặp, hay số quân bài tạm thời? Hãy xáo bài và lặp lại thử nghiệm để xem số vòng lặp và độ dài của chúng thay đổi ra sao với số quân bài được chia. Cũng theo cách tương tự, giả sử thay đổi số *bit* mà một máy tính sử dụng cho mỗi giá trị của X, chúng ta sẽ biến nó thành một cái kính hiển vi toán học để nghiên cứu cấu trúc số tinh vi của ánh xạ, sử dụng động lực của máy tính để khảo sát những quy mô độ dài trong trường hợp nếu đếm bằng ô vuông thì sẽ cần quá nhiều.

---

* Định kỳ lặp lại một trong các con số.

Bóng của thực tại

> Thực tại là thứ mà khi bạn ngừng tin vào nó, nó không biến mất.
>
> P. K. Dick**

Triết gia và nhà vật lý học sẽ thấy khó chịu với những kết quả trên. Nếu máy tính không thể phản ánh mô hình toán học, làm thế nào chúng ta quyết định liệu mô hình toán học có phản ánh thực tại không? Nếu máy tính không thể hiện thực hóa một hệ thống toán học đơn giản như Ánh xạ logistic, làm thế nào chúng ta đánh giá được lý thuyết đằng sau những mô hình thời tiết và khí hậu phức tạp hơn? Hay đối chiếu những mô hình toán học của chúng ta với thực tại? Vấn đề mô hình không đủ năng lực còn sâu xa hơn vấn đề không chắc chắn trong điều kiện ban đầu.

Một kiểm chứng về năng lực của mô hình là lấy những quan sát chúng ta đã có, và hỏi xem mô hình có thể tạo ra một chuỗi thời gian gần sát với những quan sát này không. Nếu mô hình hoàn hảo, ít nhất sẽ có một biểu diễn ban đầu che bóng bất kỳ độ dài nào của những quan sát mà chúng ta có thể lấy, và ***che bóng*** [shadowing] có nghĩa là (những) khác biệt giữa chuỗi thời gian của mô hình và chuỗi thời gian được quan sát là

** Philip Kindred Dick (1928 - 1982), nhà văn và triết gia Mỹ.

nhất quán với mô hình cho nhiễu của chúng ta. Điều này khiến mô hình cho nhiễu có được một vị thế cao hơn nó từng có trong quá khứ. Liệu chúng ta vẫn có thể trông chờ có bóng khi các mô hình không hoàn hảo? Về lâu dài thì không nếu mô hình là hỗn độn: chúng ta có thể chứng minh rằng không tồn tại một quỹ đạo che bóng nào. Nhiễu sẽ không mất đi, kể cả khi chúng ta ngừng tin vào nó. Trong những mô hình hỗn độn không hoàn hảo, chúng ta không thể lấy nhiễu sao cho có được một giải thích mạch lạc về sự khác biệt giữa mô hình và những quan sát. Sai số mô hình và nhiễu quan sát bị trộn lẫn vào nhau không thể gỡ ra. Và nếu những quan sát, những biểu diễn của mô hình và những số thực thật sự là các loại số khác nhau - giống như táo và con đười ươi - thì chúng ta nghĩ mình đang làm gì khi lấy cái nọ trừ cái kia? Để khám phá câu hỏi này, trước hết phải tìm hiểu thêm về thống kê của hỗn độn.

8

Xin lỗi, số sai: Thống kê và hỗn độn

Tôi vẫn chưa có dữ liệu, và sẽ là sai lầm chết người nếu lý thuyết hóa trước khi có dữ liệu.

(HolmRes trả lời Watson trong *Một scandal ở Bohemia*, A. C. Doyle)*

Hỗn độn đặt ra những thách thức mới cho ước lượng thống kê, nhưng chúng cần được nhìn nhận trong ngữ cảnh của những thách thức mà các nhà thống kê đã đương đầu trong nhiều thế kỷ. Khi phân tích chuỗi thời gian từ các mô hình, có nhiều điều để chúng ta thu lượm từ những hiểu biết sâu sắc về thống kê và những quy tắc căn bản về thực hành thống kê tốt. Nhưng trong

---

* Arthur Conan Doyle (1859 - 1930), nhà văn Scotland, tác giả những tiểu thuyết về thám tử Sherlock Holmes.

quá trình đối chiếu so sánh những mô hình hỗn độn với những quan sát của thế giới thực, nhà vật lý học lại đối mặt với một vấn đề "táo và cam", và điều này đưa vai trò của thống kê vào một ngữ cảnh ít quen thuộc hơn. Nghiên cứu về những hệ thống hỗn độn đã cho thấy tình trạng này mờ mịt ra sao. Thậm chí, người ta còn không đồng thuận về cách ước lượng trạng thái hiện thời của một hệ thống dựa trên những quan sát có nhiễu, có nguy cơ ngăn chúng ta đưa ra một dự báo thậm chí từ trước khi bắt đầu. Sự tiến bộ trong lĩnh vực này sẽ đem lại thành quả cho những vấn đề hết sức đa dạng, từ năng lực thấy trước thời tiết ngày mai, đến năng lực tác động lên sự thay đổi khí hậu từ bây giờ đến 50 năm sau.

Thống kê về các giới hạn, và giới hạn của thống kê

Hãy xem xét sự ước lượng một thống kê cụ thể nào đó, như chiều cao trung bình của con người. Có thể có sự bất đồng trong định nghĩa về dân số "của toàn thể loài người" (những người còn sống vào ngày 1 tháng 1 năm 2000? Những người còn sống hôm nay? Tất cả những người từng sống?...) nhưng điều đó chưa hẳn khiến chúng ta xao nhãng. Với chiều cao của mọi thành viên trong dân số, chúng ta biết có tồn tại một giá trị được xác định rõ ràng, chỉ có điều không biết giá trị ấy là gì. Chiều cao trung bình của một mẫu gồm một số người nhất định được gọi là trung bình mẫu. Mọi nhà thống kê sẽ đồng ý về giá trị này kể cả nếu họ bất đồng về mối quan hệ giữa con số ấy và trung bình mong muốn của toàn bộ dân số. (Đúng ra nên nói là hầu hết mọi nhà thống kê sẽ đồng ý). Nhưng không thể nói điều tương tự về các lũy thừa Lyapunov của mẫu. Chúng ta không rõ những lũy thừa mẫu của sự hỗn độn có thể được xác định riêng biệt theo bất kỳ cung cách có ý nghĩa nào không.

Có nhiều lý do. Thứ nhất, giống như số chiều fractal và lũy thừa Lyapunov, việc tính toán thống kê về sự hỗn độn đòi hỏi lấy giới hạn những độ dài nhỏ đến gần như biến mất và trên những khoảng thời gian dài vô tận. Những giới hạn này không bao giờ có thể được tính dựa trên quan sát. Thứ hai, nghiên cứu về hỗn độn đã cung cấp những phương pháp mới để tạo ra mô hình từ dữ liệu nhưng không xác định cụ thể phải xây dựng chúng như thế nào. Với cùng dữ liệu, các nhà thống kê khác nhau có thể đi tới những ***thống kê mẫu*** [sample-statistics] rất khác nhau, và thực tế này khiến thống kê về hỗn độn khác nhiều với trung bình mẫu.

Sự hỗn độn thay đổi những gì được xem là "tốt"

Nhiều mô hình chứa các tham số "tự do", nghĩa là không giống như tốc độ ánh sáng hay điểm đóng băng của nước, chúng là những tham số chúng ta không biết sẵn với độ chính xác cao. Vậy đâu là giá trị tốt nhất để gán cho tham số trong mô hình? Và nếu mục đích của mô hình là đưa ra dự báo, sao chúng ta lại sử dụng một giá trị từ phòng thí nghiệm hoặc từ một lý thuyết nền tảng nào đó, trong khi một giá trị tham số khác đưa ra những dự báo tốt hơn? Việc dựng mô hình những hệ thống hỗn độn thậm chí đã đòi hỏi chúng ta tái đánh giá, có thể nói là tái định nghĩa cái gọi là "tốt hơn".

Trong phiên bản yếu của Kịch bản mô hình hoàn hảo (PMS), mô hình của chúng ta có cùng cấu trúc toán học như hệ thống phát sinh ra dữ liệu, nhưng chúng ta không biết giá trị Đúng của tham số. Hãy cứ giả sử chúng ta biết rằng dữ liệu được sinh ra bởi Ánh xạ logistic, nhưng không biết giá trị của α. Trong trường hợp này, có một giá trị "tốt nhất" được định nghĩa khá rõ: giá trị của tham số đã phát sinh ra dữ liệu. Với một mô hình nhiễu hoàn hảo cho tính không chắc chắn của quan sát, làm thế nào chúng ta rút ra giá trị tham số *tốt nhất* để ứng dụng cho ngày mai nếu biết những quan sát có nhiễu từ quá khứ?

Nếu mô hình là tuyến tính, nhiều thế kỷ kinh nghiệm và lý thuyết gợi ý rằng những tham số tốt nhất là những giá trị đưa ra dự báo gần nhất với mục tiêu. Chúng ta phải cẩn thận, không điều chỉnh mô hình quá mức nếu muốn sử dụng nó cho những quan sát mới, nhưng vấn đề này đã được nhà thống kê hiểu rõ. Chừng nào mô hình còn tuyến tính và nhiễu quan sát còn phân bố hình chuông, chúng ta còn có một mục đích hấp dẫn về trực giác: tối thiểu hóa khoảng cách giữa dự báo và mục tiêu. Khoảng cách được định nghĩa theo phương pháp thông thường là bình phương nhỏ nhất, căn cứ trên sự cộng dồn bình phương của độ chênh lệch trong từng phần tử của biểu diễn. Khi tập dữ liệu tăng lên, giá trị tham số mà chúng ta ước tính sẽ ngày càng gần hơn với giá trị đã phát sinh ra dữ liệu - dĩ nhiên, với giả định rằng mô hình tuyến tính thực sự đã tạo ra dữ liệu. Còn nếu mô hình là phi tuyến?

Trong trường hợp phi tuyến, trực giác của chúng ta trong nhiều thế kỷ đã chứng tỏ nó là một sự gây rối nếu không nói là một trở ngại. Phương pháp bình phương nhỏ nhất thậm chí có thể khiến chúng ta đi xa khỏi những giá trị tham số đúng. Không thể thích ứng với thực tế đơn giản này, tác động tiêu cực đối với việc dựng mô hình khoa học sẽ khó có thể xem nhẹ. Đã có nhiều cảnh báo rằng mọi thứ có thể trở nên bất ổn, nhưng do không có bất kỳ nguy cơ rõ ràng và hiện hữu nào - cũng như do ứng dụng dễ dàng - nên các phương pháp như vậy thường được áp dụng (sai) trong những hệ thống phi tuyến. Việc dự báo sự hỗn độn đã khiến nguy cơ này trở nên rõ hơn: giả sử chúng ta có những quan sát có nhiễu từ Ánh xạ logistic, với $\alpha = 4$ (mà chúng ta không biết), thì ngay cả với một tập dữ liệu vô hạn, phương pháp bình phương nhỏ nhất cũng đem lại một giá trị quá nhỏ của α. Đây không phải là vấn đề quá ít dữ liệu hay quá ít nguồn lực máy tính, mà là các phương pháp được phát triển cho những hệ thống tuyến tính đưa ra câu trả lời sai khi áp dụng cho những vấn đề phi tuyến. Những công cụ chủ chốt của thống kê sẽ không có tác dụng khi ước tính tham số của mô hình phi tuyến. Đây là một hoàn cảnh mà việc bỏ qua những chi tiết toán học và hy vọng về điều tốt nhất dẫn tới thảm họa trong thực hành: lời giải toán học cho phương pháp bình phương nhỏ nhất ngầm định rằng tính không chắc chắn có phân bố hình chuông cả trong biểu diễn ban đầu lẫn trong dự báo. Trong những mô hình tuyến tính, một phân bố hình chuông cho tính không chắc chắn ở điều kiện ban đầu dẫn tới một phân bố hình chuông cho tính không chắc chắn ở dự báo. Trong những mô hình phi tuyến, điều đó không đúng.

Vấn đề trên bị bỏ qua chừng nào thì hầu như cũng quan trọng chừng ấy. Ngay cả ngày nay, chúng ta cũng không có một quy tắc mạch lạc, dễ triển khai cho việc ước tính tham số trong những mô hình phi tuyến. Chính nghiên cứu về hỗn độn đã khiến thực tế này trở nên hiển nhiên một cách nhức nhối. Gần đây, Kevin Judd, một nhà toán học ứng dụng tại Đại học Western Australia đã lập luận rằng với những quan sát đã có, không riêng gì nguyên tắc bình phương nhỏ nhất mà ý tưởng sự giống nhau nhiều nhất cũng là một chỉ dẫn không đáng tin cậy trong những hệ thống phi tuyến. Điều đó không ngầm nói rằng vấn đề không thể giải quyết được: con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta có thể ước tính α rất chính xác, nhưng nó sẽ không sử dụng bình phương nhỏ nhất. Nó sẽ sử dụng các bóng. Thống kê hiện đại đang ứng phó tốt với những thách thức của sự ước lượng phi tuyến, ít nhất trong những trường hợp cấu trúc toán học của các mô hình là đúng.

Dối trá, dối trá nguy hiểm và những ước tính về số chiều

Một sinh viên trẻ từng có ý định,
lượng hóa số chiều fractal.
Nhưng các điểm dữ liệu không phải là miễn phí,

và, cần tới 42 chiều [42-to-the-D],
cô đã chấp nhận kiểm tra bằng mắt.
(phỏng theo James Thieler)

Mark Twain* có lẽ đã thích fractal, nhưng chắc chắn ông ghét những ước tính về số chiều. Năm 1983, Peter Grassberger và Itamar Procaccia** công bố một công trình có tiêu đề "Đo lường độ lạ của những điểm thu hút lạ" - một công trình đã được trích dẫn bởi hàng ngàn nghiên cứu khoa học khác. Để có thông tin lý thú, chúng ta hãy tham khảo những trích dẫn này và tìm hiểu xem những ý tưởng từ nghiên cứu về hỗn độn đã lan rộng giữa các bộ môn ra sao, từ vật lý học và toán học ứng dụng đến mọi loại khoa học khác.

Công trình nói trên cung cấp một thủ tục đơn giản rất thú vị để từ một chuỗi thời gian, người ta ước tính số phần tử cần có trong biểu diễn của một mô hình tốt cho một hệ thống hỗn độn. Thủ tục này được bổ sung đầy đủ với nhiều cạm bẫy được báo trước. Tuy nhiên, rất nhiều nếu không nói là hầu hết các ứng dụng đối với dữ liệu thực có lẽ nằm ở một trong số các cạm bẫy ấy. Tính vững chắc toán học của số chiều

---

* Mark Twain (1835 - 1910), nhà văn Mỹ.

** - Peter Grassberger (sinh năm 1940), nhà vật lý Áo.
- Itamar Procaccia (sinh năm 1949), nhà vật lý - hoá học Israel.

khiến cho việc nắm bắt nó trở nên đáng giá: bạn có thể lấy một vật thể và kéo nó, gập nó, cuộn nó lại trong một hình cầu, thậm chí cắt nó thành vô số mẩu và gắn các mảnh lại với nhau theo bất kỳ cách cũ nào, và bạn sẽ không làm thay đổi số chiều của nó. Chính do tính biến dạng đàn hồi này nên phải cần những tập dữ liệu khổng lồ mới có một cơ hội hiếm hoi đạt được những kết quả có ý nghĩa. Đáng tiếc là thủ tục có xu hướng nghiêng về phía *những xác thực sai* [false positives]***, và đi tìm sự hỗn độn bằng cách đo lường một số chiều thấp thì hợp thời hơn. Một sự kết hợp không hay. Những quan tâm đến việc phát hiện động lực có số chiều thấp và sự hỗn độn đã được thúc đẩy bởi một định lý toán học, trong đó đề xuất rằng người ta có thể dự báo sự hỗn độn mà thậm chí không biết các phương trình là gì.

Định lý Takens và thuyết nhúng

Trong thập niên 1980, khi những ý tưởng của các nhà vật lý học ở California, dẫn đầu bởi Packard và Farmers**** được trao cho một nền

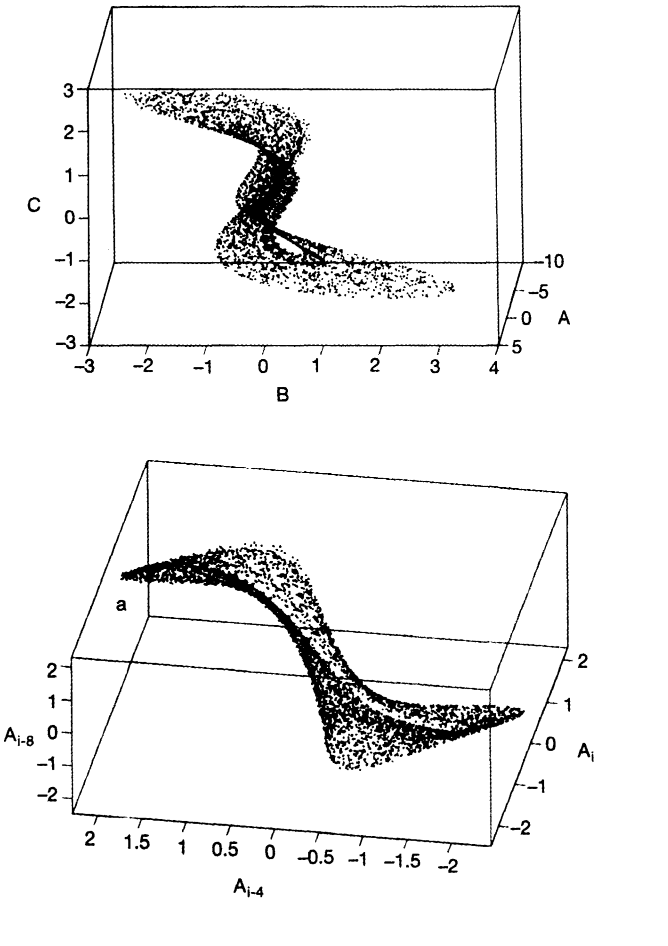
*** Những kết quả có vẻ hứa hẹn nhưng thực tế thì không.

**** - Norman Harry Packard (sinh năm 1954), nhà vật lý Mỹ.
- J. Doyne Farmers (sinh năm 1952), nhà vật lý Mỹ.

tảng toán học bởi nhà toán học người Hà Lan Floris Takens, sự phân tích chuỗi thời gian đã có diện mạo mới. Trên nền tảng này, những phương pháp mới để phân tích và dự báo từ một chuỗi thời gian đã nhanh chóng xuất hiện. Định lý Takens nói rằng nếu chúng ta lấy những quan sát từ một hệ thống tất định diễn tiến trong một không gian biểu diễn với số chiều d, thì dưới một số ràng buộc rất lỏng lẻo nào đó, sẽ có một mô hình động lực gần như y hệt trong không gian trễ, được xác định bởi *hầu hết mọi* hàm đo lường (quan sát) riêng lẻ. Giả sử biểu diễn của hệ thống ban đầu có ba phần tử *a*, *b*, *c*. Định lý nói rằng từ một chuỗi thời gian những quan sát của bất kỳ phần tử nào trong số chúng, có thể tạo ra một mô hình của toàn bộ hệ thống. Điều này được minh họa bằng những quan sát thực trong hình 24. Khi chỉ lấy một chiều đo, chẳng hạn *a*, và tạo ra một vector với những phần tử là giá trị của *a* trong hiện tại và trong quá khứ, chúng ta có một không gian biểu diễn *tái tạo trễ* [delay-reconstruction], trong đó có thể tìm thấy một mô hình tương đương với hệ thống ban đầu. Nếu điều đó xảy ra, nó được gọi là một sự *nhúng* [embedding] trễ. Điều kiện giới hạn "hầu hết mọi" là cần thiết để tránh chọn phải một khoảng thời gian không tốt giữa các quan sát. Nói theo kiểu loại suy thì nếu chỉ quan sát thời tiết vào buổi trưa, bạn sẽ không có manh mối gì về điều xảy ra vào ban đêm.

Định lý Takens viết lại vấn đề dự báo, từ chỗ là một vấn đề ngoại suy trong thời gian thành một vấn đề ngoại suy trong không gian biểu diễn. Nhà thống kê truyền thống là người ở cuối dòng dữ liệu của mình, cố gắng đưa ra dự báo về một tương lai không biết, trong khi Định lý Takens đặt nhà vật lý học vào một không gian biểu diễn nhúng trễ [delay-embedding], cố gắng nội suy giữa các quan sát trước đó. Nhận thức này không chỉ tác động đến các mô hình dựa trên dữ liệu. Các mô hình mô phỏng phức tạp có số chiều cao và diễn tiến trên một điểm hấp dẫn có số chiều thấp hơn cũng có thể được dựng kiểu bởi những mô hình dựa trên dữ liệu có số chiều thấp hơn nhiều. Về nguyên tắc, chúng ta cũng có thể hợp nhất những phương trình trong không gian có số chiều thấp này, nhưng trong thực tiễn, chúng ta thiết lập những mô hình như những mô phỏng vật lý trong không gian có số chiều cao. Đôi khi có thể chứng minh rằng động lực ở số chiều thấp hơn cũng xuất hiện, nhưng chúng ta không rõ làm thế nào thiết lập những phương trình trong không gian có số chiều thấp liên quan.

Khi so sánh hình 24 với hình 14, rõ ràng những quan sát từ mạch điện "trông giống như" điểm hấp dẫn Moore-Spiegel, nhưng thật ra sự



Hình 24. Một minh họa cho thấy Định lý Takens có thể thích hợp với dữ liệu từ mạch điện của Machete, vốn được thiết kế cẩn thận để tạo ra chuỗi thời gian giống như chuỗi thời gian của Hệ thống Moore-Spiegel. Sự tái tạo trễ của một chiều đo ở đồ thị dưới có kiểu phân bố tương tự như đồ thị trên, dù đồ thị trên biểu diễn giá trị của ba đo lường đồng thời khác nhau. Hãy đối chiếu những hình này với đồ thị dưới của hình 14.

tương tự này sâu xa đến đâu? Mọi hệ thống vật lý là khác nhau. Thông thường, khi chúng ta có ít dữ liệu - và hiểu biết càng ít hơn - thì những mô hình thống kê cung cấp một điểm khởi đầu có giá trị cho dự báo. Trong quá trình biết nhiều hơn và thu thập thêm dữ liệu, những mô hình mô phỏng thường cho thấy dáng điệu "tương tự" như chuỗi thời gian của các quan sát, và khi các mô hình trở nên phức tạp, sự tương tự này thường mang tính định lượng hơn. Với những trường hợp hiếm hoi như mạch điện này, trong đó khoảng thời gian cho các quan sát là rất lớn, có vẻ những mô hình dựa trên dữ liệu - kể cả những mô hình do Định lý Takens gợi ý - thường phù hợp nhất cho sự định lượng. Các mô hình mô phỏng của chúng ta gần như đang thể hiện một mạch điện hoàn hảo hoặc một hành tinh nào đó, trong khi các mô hình dựa trên dữ liệu sẽ phản ánh sát hơn mạch điện trên bàn. Trong mỗi trường hợp, chúng ta chỉ có sự tương tự. Dù sử dụng mô hình thống kê, mô hình mô phỏng hay mô hình tái tạo trễ, chúng ta vẫn không rõ ý nghĩa khiến cho mô hình vật lý được mô tả bởi bất kỳ phương trình mô hình nào. Điều này thường gặp ở những hệ thống vật lý mà các mô hình tốt nhất dành cho chúng là hỗn độn. Chúng ta muốn làm chúng phù hợp về mặt thực nghiệm, nhưng không phải luôn chắc chắn biết cách cải thiện chúng. Và với những hệ thống như khí quyển trái đất, chúng ta không thể đợi để có khoảng thời gian quan sát được đòi hỏi. Nghiên cứu về hỗn độn đề xuất một sự tổng hợp của ba cách tiếp cận này đến sự tạo lập mô hình, nhưng vẫn chưa cách nào thành tựu.

Có nhiều diễn giải sai thường gặp về Định lý Takens. Một là, nếu có một số quan sát đồng thời, bạn *nên* sử dụng chỉ một trong số chúng. Takens cho phép chúng ta sử dụng tất cả! Thứ hai là quên rằng Định lý Takens chỉ nói *nếu* chúng ta có động lực tất định ở số chiều thấp, *thì* nhiều tính chất của nó được duy trì trong một sự tái tạo trễ. Phải cẩn thận không đảo ngược mệnh đề *nếu-thì* rồi cho rằng thấy những đặc tính nhất định trong một sự tái tạo trễ nhất thiết có nghĩa là có sự hỗn độn, bởi chúng ta hiếm khi, nếu không nói là không bao giờ, biết cấu trúc toán học Đúng của hệ thống đang được quan sát.

Định lý Takens nói rằng *hầu hết mọi* chiều đo đều đúng với những phát biểu của định lý. Đây là trường hợp "hầu hết mọi" trong không gian chức năng của nhà toán học tương ứng với "không có lấy một" trong phòng thí nghiệm của thế giới thực. Sự cắt bớt số hạng đến một con số hữu hạn các *bit* vi phạm một giả định của định lý. Ngoài ra có vấn đề nhiễu quan sát trong các đo lường. Đến một mức độ nào đó, đây chẳng qua là những phàn nàn kỹ thuật. Một mô hình tái tạo trễ có thể vẫn tồn tại, và nhà thống kê cũng như nhà vật lý có thể chấp nhận những khó khăn khi tính xấp xỉ nó với những ràng buộc thực tiễn về dòng dữ liệu. Một vấn đề khác khó khắc phục hơn: khoảng thời gian cho các quan sát cần vượt quá thời gian tái lặp điển hình. Rất có thể khoảng thời gian đòi hỏi không những dài hơn tập dữ liệu hiện tại, mà nó còn dài hơn quãng đời của chính hệ thống. Sẽ phải mất bao lâu để chúng ta thấy hai ngày với những quan sát thời tiết quá giống nhau đến nỗi không thể phân biệt? Hay nói cách khác, hai ngày mà sự khác biệt giữa các trạng thái tương ứng của khí quyển trái đất nằm trong phạm vi của tính không chắc chắn trong quan sát? Khoảng 10^{30} năm. Đây khó có thể được xem là một ràng buộc kỹ thuật: ở quy mô thời gian đó, mặt trời đã trương nở thành một khối khổng lồ đỏ rực làm trái đất bốc hơi, và vũ trụ thậm chí đã sụp đổ trong Vụ sập lớn [Big Crunch]*. Chúng ta sẽ để nhà triết học suy ngẫm về những ngụ ý của một định lý đòi hỏi khoảng thời gian quan sát vượt quá quãng đời của hệ thống.

---

* Trong vũ trụ học, Big Crunch là một kịch bản về số phận cuối cùng của vũ trụ, trong đó sự mở rộng mêtric (metric) của không gian cuối cùng sẽ đảo ngược, vũ trụ tái sụp đổ, kết thúc như một lỗ đen kỳ dị, hoặc bắt đầu quá trình tái hình thành vũ trụ với khởi đầu là một Big Bang (Vụ nổ lớn) mới.

Trong những hệ thống khác, chẳng hạn chuỗi thời gian của trò chơi roulette, thời gian giữa các quan sát của những trạng thái giống nhau có thể ngắn hơn nhiều. Sự tìm kiếm số chiều từ các dòng dữ liệu dần dần bị thay thế bởi nỗ lực xây dựng các mô hình từ dòng dữ liệu. Người ta đã phỏng đoán rằng việc xây dựng một mô hình tốt hầu như luôn cần ít dữ liệu hơn việc đạt được một ước tính số chiều chính xác. Đây là một dấu hiệu khác cho thấy sự tập trung vào động lực học có thể có lợi hơn sự tập trung vào thống kê ước tính. Trong bất kỳ sự kiện nào, hứng thú xây dựng những mô hình mới dựa trên dữ liệu đã đưa nhiều nhà vật lý vào một lĩnh vực phần lớn dành riêng cho nhà thống kê. Một phần tư thế kỷ sau khi định lý Takens ra đời, một ảnh hưởng chủ yếu của nó là kết hợp cách tiếp cận của nhà thống kê với cách tiếp cận của nhà vật lý trong việc dựng mô hình các hệ thống động lực. Mọi thứ vẫn đang tiến triển, và một tổng hợp đích thực của hai cách tiếp cận này vẫn chưa thấy xuất hiện.

Dữ liệu thay thế

Khó khăn trong việc nắm vững sự ước lượng thống kê ở những hệ thống phi tuyến đã cho ra đời những kiểm nghiệm thống kê mới về mức độ ý nghĩa, sử dụng "*dữ liệu thay thế*" [surrogate data]. Các nhà khoa học sử dụng dữ liệu thay thế một cách có phương pháp để bẻ gãy những lý thuyết yêu thích của họ, vô hiệu hóa những kết quả được nâng niu nhất. Không phải mọi kiểm nghiệm không thể phá bỏ một kết luận đều làm nó mạnh hơn, nhưng biết những giới hạn của một kết quả cũng luôn là một điều hay.

Những kiểm nghiệm bằng dữ liệu thay thế có mục đích tạo ra chuỗi thời gian giống như dữ liệu được quan sát, nhưng đến từ một hệ thống động lực đã biết. Mấu chốt ở chỗ hệ thống này được biết là *không* có tính chất mà một người đang hy vọng phát hiện: liệu chúng ta có thể tìm ra những kết quả có vẻ hứa hẹn nhưng thực tế thì không (được gọi là những xác thực sai) bằng cách áp dụng cùng một phân tích cho dữ liệu quan sát, sau đó cho nhiều tập dữ liệu thay thế. Khởi đầu, chúng ta biết rằng dữ liệu thay thế chỉ có thể cho thấy những xác thực sai, nên nếu dữ liệu quan sát không được phân biệt một cách dễ dàng với dữ liệu thay thế, phân tích sẽ ít có ý nghĩa thiết thực. Trong thực tế, điều đó có nghĩa là gì? Giả sử chúng ta đang hy vọng "phát hiện sự hỗn độn" và lũy thừa Lyapunov ước tính hóa ra là 0,5: giá trị ấy có lớn hơn zero một cách có ý nghĩa không? Nếu có, đó là bằng chứng về một trong các điều kiện của hỗn độn.

Dĩ nhiên 0,5 lớn hơn zero. Câu hỏi chúng ta muốn hỏi là: những dao động ngẫu nhiên trong một lũy thừa ước tính liệu có khả năng lớn đến 0,5 trong một hệ thống (i) tạo ra chuỗi thời gian tương tự không, và (ii) lũy thừa đúng của nó thật sự không lớn hơn zero? Có thể tạo ra một chuỗi thời gian thay thế và ước tính lũy thừa từ chuỗi thay thế này. Trên thực tế, chúng ta có thể tạo 1000 chuỗi thay thế khác nhau, và có được 1000 lũy thừa khác nhau. Sau đó, chúng ta có thể chấp nhận kết quả nếu hầu hết 1000 ước tính từ chuỗi thay thế đều nhỏ hơn đáng kể so với giá trị 0,5. Nhưng nếu sự phân tích dữ liệu thay thế thường đưa đến những lũy thừa lớn hơn 0,5 thì khó mà cho rằng sự phân tích dữ liệu thực tế cung cấp bằng chứng về một lũy thừa Lyapunov lớn hơn zero.

Thống kê ứng dụng

Tất nhiên, vào một tình huống cấp thiết, người ta có thể dùng búa để vặn đinh ốc. Những công cụ thống kê với mục đích phân tích các hệ thống hỗn độn có thể cho chúng ta một cách mới và hữu hiệu để khảo sát những quan sát từ các hệ thống không hỗn độn. Dữ liệu không đến từ một hệ thống hỗn độn không có nghĩa là một phân tích thống kê như vậy không chứa đựng thông tin có giá trị. Sự phân tích nhiều chuỗi thời gian, đặc biệt trong y học, sinh thái học và khoa học xã hội có thể rơi vào loại này và cung cấp những thông tin hữu ích, vốn không có sẵn từ sự phân tích thống kê truyền thống. Thực hành thống kê tốt giúp chúng ta không bị sai lầm bởi mơ tưởng thiếu thực tế, và những hiểu biết thu được có thể chứng tỏ có giá trị trong ứng dụng, bất kể nó có xác lập những tính chất hỗn độn của dòng dữ liệu hay không.

Việc biến một tập hợp những quan sát có nhiễu thành một tập hợp những biểu diễn ban đầu của mô hình được gọi là sự đồng hóa dữ liệu [Data Assimilation]. Trong Kịch bản mô hình hoàn hảo (PMS), có một biểu diễn Đúng mà chúng ta có thể ước tính, và với mô hình nhiễu cho sẵn, có một tập hợp hoàn hảo mà chúng ta cũng có thể nhắm đến việc ước tính, tất nhiên kịch bản đó chỉ xảy ra đối với con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta. Còn trong nhiệm vụ dự báo thực tế, chúng ta đang cố gắng dự đoán những hệ thống vật lý thực bằng cách sử dụng những hệ thống toán học hoặc mô phỏng máy tính. Giả định mô hình hoàn hảo không bao giờ chứng minh được và hầu như luôn sai: Đâu là mục đích của sự đồng hóa dữ liệu trong trường hợp này? Ở đây, không đơn giản là chúng ta có "số sai" khi ước tính biểu diễn của mô hình tương ứng với thực tại, mà là không có "số đúng" nào để mà phát hiện. Có vẻ như vấn đề mô hình không tương xứng thậm chí còn đưa những dự báo xác suất vượt ngoài tầm với. Những nỗ lực dự báo các hệ thống hỗn độn bằng những mô hình không hoàn hảo đang dẫn tới những biện pháp mới để khám phá cách khai thác sự đa dạng trong động thái mà các mô hình không hoàn hảo của chúng ta thể hiện. Để tiến bộ trong lĩnh vực này, chúng ta không bao giờ được làm mờ đi sự phân biệt giữa những mô hình toán học, những mô phỏng máy tính và thế giới thực phát sinh các quan sát. Chúng ta sẽ trở lại với dự báo trong chương tiếp theo.

9

Tính có thể dự báo: Hỗn độn có ràng buộc các dự báo không?

> Có hai lần tôi đã được [các thành viên Nghị viện] hỏi, "Thưa ông Babbage, nếu ông đưa vào một cỗ máy những con số sai, liệu nó có đưa ra câu trả lời đúng không?" Tôi không đủ khả năng hiểu rõ sự lẫn lộn về ý tưởng khiến dẫn tới một câu hỏi như vậy.
>
> Charles Babbage*

Chúng ta lúc nào cũng đang đưa những con số sai vào cỗ máy. Nghiên cứu về hỗn độn đã tái tập trung sự quan tâm vào việc xác định xem liệu có bất kỳ "số đúng" nào tồn tại không. Sự dự báo cho phép chúng ta khảo sát

---

* Charles Babbage (1791 - 1871) nhà thông thái người Anh.

mối quan hệ giữa mô hình và thế giới thực theo hai hướng có phần nào hơi khác. Chúng ta có thể kiểm nghiệm năng lực của mô hình trong việc dự báo hành vi của hệ thống trong ngắn hạn, chẳng hạn dự báo thời tiết. Hoặc có thể sử dụng mô hình khi quyết định làm thế nào thay đổi chính hệ thống ấy - ở đây chúng ta đang tìm cách thay đổi tương lai đến một hành vi nào đó đáng mong muốn hoặc bớt phiền phức hơn, như khi sử dụng các mô hình khí hậu cho việc quyết định chính sách.

Đối với con quỷ của Laplace, sự hỗn độn không đặt ra khó khăn về dự báo: với những điều kiện ban đầu chính xác, một mô hình hoàn hảo và nguồn lực để tính toán chính xác, nó có thể mô tả diễn tiến của một hệ thống hỗn độn theo thời gian, giống như nó mô tả một hệ thống tuần hoàn. Con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta có một mô hình hoàn hảo và có thể tính toán chính xác, nhưng nó bị ràng buộc bởi những quan sát không chắc chắn, kể cả nếu những quan sát ấy mở rộng vào quá khứ không hạn định theo những khoảng cách đều đặn về thời gian. Hóa ra nó không thể sử dụng những quan sát lịch sử này để nhận dạng trạng thái hiện thời. Nhưng với những quan sát đã có, nó thu thập được một mô tả trọn vẹn về tính không chắc chắn của nó đối với trạng thái. Một số người gọi đây là một phân bố xác suất khách quan cho trạng thái, nhưng chúng ta không cần đề cập. Những thực tế này có một số ý nghĩa: ngay cả với một mô hình hoàn hảo về một hệ thống tất định, con quỷ cũng không thể làm tốt hơn việc đưa ra những dự báo mang tính xác suất. Chúng ta không mong làm tốt hơn, và điều này có nghĩa là sẽ phải chấp nhận sự đánh giá mang tính xác suất về các mô hình tất định của chúng ta. Nhưng tất cả những con quỷ này tồn tại bên trong Kịch bản mô hình hoàn hảo, còn chúng ta phải vứt bỏ những hư cấu toán học về mô hình hoàn hảo và số vô tỷ nếu muốn đưa ra những dự báo chân thật về thế giới thực. Nếu không biết rõ rằng mình đã làm như vậy, chúng ta sẽ chỉ mất công vô ích.

Dự báo sự hỗn độn

Đừng tin nữa,
Những con quỷ nói quanh co theo nghĩa nước đôi;
Cho chúng ta nghe lời hứa hẹn,
Rồi đập nát nó trước hy vọng của chúng ta.

Macbeth (Hồi V)

Từ lâu, những người mạo hiểm đưa ra dự báo đã bị phê phán, kể cả khi dự báo của họ chứng tỏ là chính xác theo một ý nghĩa kỹ thuật. Vở bi kịch *Macbeth* của W. Shakespeare tập trung vào những dự báo tuy chính xác ở một phương diện kỹ thuật nào đó nhưng lại không cung cấp sự hỗ trợ hiệu quả cho việc ra quyết định. Khi Macbeth giáp mặt với các phù thủy và hỏi họ làm gì, họ đáp "một việc không tên". Vài trăm năm sau, thuyền trưởng Fitzroy đặt ra thuật ngữ "dự báo" [forecast]. Luôn có khả năng một dự báo là nhất quán bên trong xét từ tầm nhìn của người lập mô hình, nhưng lại đưa ra chỉ dẫn sai cho những kỳ vọng của người sử dụng dự báo. Nguồn gốc lời phàn nàn của Macbeth đối với các phù thủy nằm ở chỗ đó: họ liên tục đưa ra những tin tức dễ chịu của điều dường như là một con đường dẫn tới tương lai xán lạn. Mỗi dự báo đều chứng tỏ chính xác đến không thể phủ nhận, nhưng sự xán lạn chẳng có bao nhiêu. Các nhà dự báo hiện đại, khi diễn giải tính không chắc chắn trong những mô hình toán học của họ như thể nó phản ánh xác suất thực tế của những sự kiện tương lai, liệu có thể hy vọng tránh được gánh nặng nói trong một *nghĩa nước đôi* [double-sense] hay không? Liệu họ có lỗi như lời cáo buộc của Macbeth không, khi diễn đạt cẩn thận những dự báo xác suất của họ, biết rõ rằng chúng ta sẽ cho phép sự hỗn độn làm chúng ta không chú ý tới những sự kiện xảy ra theo hướng hoàn toàn khác?

Từ sự chính xác đến tính khả quy trách nhiệm

Khó mà đổ lỗi cho nhà dự báo vì không thể đưa ra một bức tranh sáng tỏ về tương lai mà chúng ta sẽ gặp nếu không thể cho họ một bức tranh sáng tỏ về tình trạng hiện tại. Tuy nhiên, chúng ta có thể kỳ vọng mô hình cho thấy điều kiện ban đầu phải được biết chính xác đến đâu để đảm bảo những sai số dự báo nằm dưới một mức độ mục tiêu nào đó. Một khi có biểu diễn ban đầu đủ chính xác, hy vọng câu hỏi có thể giảm nhiễu đến mức đó không phải là một câu hỏi không phụ thuộc vào năng lực dự báo của mô hình.

Một cách lý tưởng, một mô hình sẽ có khả năng che bóng: sẽ có một biểu diễn ban đầu nào đó mà chúng ta có thể lặp, sao cho chuỗi thời gian thu được gần với chuỗi thời gian của quan sát. Phải đợi đến sau khi có các quan sát để xem bóng có tồn tại không, và "gần" phải được xác định bởi những tính chất của nhiễu quan sát. Còn nếu *không có* biểu diễn ban đầu nào che bóng, mô hình về cơ bản là không đủ năng lực. Hoặc nếu có một quỹ đạo che bóng thì sẽ có nhiều quỹ đạo khác. Cho đến nay, tập hợp những biểu diễn hiện thời với một lịch sử che bóng được xem là không thể phân biệt: nếu trạng thái Đúng có đó, chúng ta cũng không thể nhận ra nó. Chúng ta cũng không thể biết cái nào trong số chúng sẽ tiếp tục che bóng khi được lặp tới để tạo ra một dự báo, nhưng có thể tạm thoải mái với việc biết những thời điểm che bóng điển hình của những dự báo khởi đầu từ một trong các biểu diễn không thể phân biệt này.

Khá dễ thấy rằng chúng ta được dẫn dắt tới những dự báo nhóm căn cứ trên những ứng viên đã che bóng cho các quan sát tới thời điểm hiện tại. Những năm 1960, nhận thấy với một điều kiện ban đầu không hoàn hảo thì ngay cả một mô hình hoàn hảo cũng không thể đưa ra một dự báo hoàn hảo, Karl Popper* đã định nghĩa một *mô hình khả quy trách nhiệm* [accountable model]. Đây là mô hình có thể lượng hóa mức khống chế giá trị nhỏ cần thiết của tính không chắc chắn ban đầu nhằm đảm bảo một giới hạn cụ thể đáng mong muốn về sai số dự báo. Việc quyết định mức khống chế của tính không chắc chắn ban đầu ở các hệ thống phi tuyến là khó hơn đáng kể so với các hệ thống tuyến tính, nhưng chúng ta có thể khái quát hóa ý niệm về tính khả quy trách nhiệm và sử dụng nó để đánh giá xem các dự báo nhóm có phản ánh một cách hợp lý những phân bố xác suất không. Các

* Karl Popper (1902 - 1994), triết gia Áo - Anh.

nhóm sẽ luôn có một số lượng thành phần hữu hạn, nên bất kỳ dự báo xác suất nào được tạo ra từ chúng sẽ phải chịu sự phân tích hữu hạn này: nếu có 1000 thành phần, có thể hy vọng thấy hầu hết các sự kiện với 1% cơ hội xảy ra, nhưng chúng ta biết có khả năng sẽ lỡ những sự kiện chỉ có 0,001% cơ hội xảy ra. Một hệ thống dự báo nhóm được gọi là ***khả quy trách nhiệm*** nếu nó cho biết nhóm phải lớn chừng nào để nắm bắt được các sự kiện với một xác suất cho sẵn. Tính khả quy trách nhiệm phải được đánh giá về mặt thống kê trên nhiều dự báo, nhưng đây là một thứ mà nhà thống kê biết khá rõ phải làm thế nào.

Con quỷ thế kỷ 21 có thể đưa ra những dự báo khả quy trách nhiệm: nó sẽ không biết tương lai, nhưng tương lai không đem lại cho nó sự ngạc nhiên. Sẽ không có những sự kiện không thể thấy trước, và những sự kiện bất thường sẽ xảy ra với tần suất kỳ vọng của nó.

Mô hình không thích hợp

Với mô hình hoàn hảo, con quỷ thế kỷ 21 có thể tính toán những xác suất hữu dụng như trên. Tại sao chúng ta thì không? Có những nhà thống kê lập luận rằng chúng ta có thể, trong số họ có lẽ bao gồm cả thành viên của một nhóm rộng hơn gồm các nhà thống kê tự gọi mình là những người theo Bayes [Bayesian]*. Hầu hết những người này có sự nhấn mạnh khá hợp lý vào việc sử dụng đúng đắn các khái niệm về xác suất, nhưng trong số họ có một nhóm nhỏ và có tiếng nói, đã lẫn lộn sự đa dạng trong các mô hình với tính không chắc chắn trong đời thực. Giống như việc sử dụng thiếu chính xác các khái niệm về xác suất là một sai lầm, việc áp dụng chúng vào những hoàn cảnh không phù hợp cũng la một sai lầm. Hãy xem xét một ví dụ bắt nguồn từ Bảng Galton.

Hãy trở lại với hình 2. Chỉ cần tra từ "quincunx" trên Google, bạn có thể tìm mua trên Internet những phiên bản hiện đại của hình bên trái. Cái máy ứng với hình bên phải sẽ khó tìm hơn. Các nhà thống kê hiện đại thậm chí đã chất vấn liệu có đúng Galton đã thực sự tạo ra cái máy không, dù Galton đã mô tả những thí nghiệm với phiên bản đó. Các thí nghiệm được gọi là "thí nghiệm tưởng tượng" vì ngay cả những nỗ lực hiện đại để xây dựng một thiết bị tái tạo kết quả lý thuyết cũng nhận thấy "vô cùng khó tạo ra một thiết bị thực hiện được nhiệm vụ một cách thỏa

---

* Sử dụng những phương pháp xác suất và thống kê đặt theo tên Thomas Bayes (~1702-1761), nhà thống kê và triết gia người Anh nổi tiếng với Định lý Bayes.

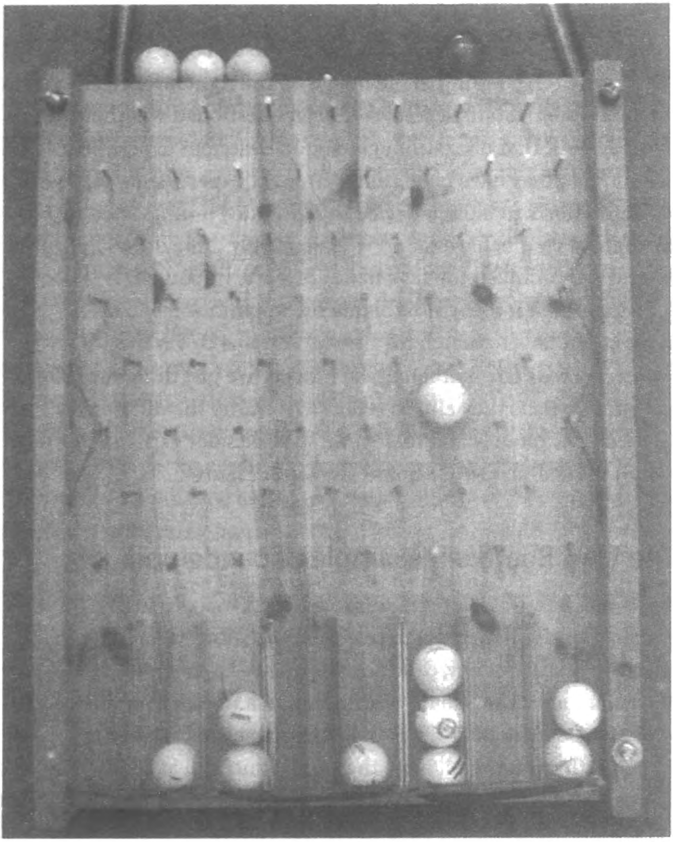
đáng". Không hiếm khi một nhà lý thuyết đổ lỗi cho máy khi một thí nghiệm không khớp với lý thuyết của mình. Có lẽ đây chẳng qua là một dấu hiệu cho thấy những mô hình toán học của chúng ta đơn giản khác với những hệ thống vật lý mà chúng có ý định mô tả? Để làm rõ những sai khác giữa mô hình và thực tại, chúng ta sẽ xét các thí nghiệm về Bảng NAG (*Not A Galton*, "không phải Galton"), được trình bày ở hình 25.

Bảng NAG: một ví dụ về xứ quỷ

Bảng NAG là "Bảng không phải Galton". Ban đầu nó được xây dựng cho một cuộc gặp gỡ nhân kỷ niệm năm thứ 150 của Hội Khí tượng học Hoàng gia, trong đó Galton là thành viên. Bảng NAG gồm một loạt đinh được phân bố theo kiểu gợi nhớ đến Bảng Galton, nhưng các cây đinh có khoảng cách xa hơn và được đóng không theo cách hoàn hảo. Hãy để ý có một đinh ghim nhỏ màu trắng ở trên cùng của bảng, ngay phía trái của điểm giữa. Thay vì sử dụng những viên chì, ở đây những quả bóng golf được cho đi qua Bảng NAG, mỗi lần một quả, mỗi quả đều khởi đầu ở chính xác cùng vị trí, hoặc với mức độ chính xác mà một quả bóng golf có thể được đặt bằng tay dưới đinh ghim trắng. Các quả bóng golf tạo ra âm thanh dễ chịu, nhưng chúng không đưa ra những quyết định nhị nguyên (chỉ có hai lựa chọn) ở mỗi đinh. Trên thực tế, đôi khi chúng di chuyển theo chiều ngang qua nhiều đinh trước khi rơi xuống mức tiếp theo. Giống như Bảng Galton và trò roulette, động lực của Bảng NAG là không tái lặp: động lực của mỗi quả bóng là nhất thời, nên những hệ thống này không biểu thị sự hỗn độn. Spiegel gợi ý hành vi này được gọi là ***xứ quỷ*** [*pandemonium*]*. Không giống như Bảng Galton, sự phân bố của các quả bóng golf ở đáy Bảng NAG không phản ánh phân bố hình chuông. Tuy nhiên, chúng ta có thể sử dụng một tập hợp bóng golf để có được một ước tính xác suất hữu dụng về nơi quả bóng golf tiếp theo có khả năng rơi xuống.

Nhưng thực tế không phải là một quả bóng golf. Thực tế là một quả bóng cao su đỏ. Và nó chỉ được thả một lần. Con quỷ của Laplace sẽ không cho phép bàn luận về điều gì khác có thể đã xảy ra: không có điều gì khác có thể đã xảy ra. Phép loại suy ở đây là quả bóng cao su đỏ giống như khí quyển trái đất, và các quả bóng golf như những thành phần nhóm trong mô hình của chúng ta. Chúng ta có thể đầu tư vào bao nhiêu

* *Pandæmonium* là thủ phủ của Địa ngục trong thiên sử thi *Thiên đường đã mất* (*Paradise Lost*) của John Milton, cũng nói tới sự huyên náo, hỗn loạn.



Hình 25. Bảng NAG, ban đầu được trình bày ở một cuộc gặp gỡ tại Trường St John, Cambridge, nhân kỷ niệm năm thứ 150 của Hội Khí tượng học Hoàng gia. Lưu ý quả bóng golf rơi qua bảng không tạo ra những lựa chọn nhị nguyên đơn giản.

thành phần như mình chọn. Nhưng sự phân bố của những quả bóng golf nói gì với chúng ta về đường đi duy nhất của quả bóng cao su đỏ? Có chắc rằng sự đa dạng trong dáng điệu mà chúng ta quan sát giữa các quả bóng golf nói ra điều gì đó hữu ích? Ít nhất, nó cũng cho chúng ta một mức khống chế thấp hơn của tính không chắc chắn, quá mức đó chúng ta biết mình không thể tự tin. Nhưng nó không bao giờ có thể cung cấp một mức khống chế để chúng ta tự tin một cách tuyệt đối, kể cả theo ý nghĩa xác suất. Bằng phép loại suy chặt chẽ, việc khảo sát sự đa dạng của mô hình có thể rất hữu ích, kể cả nếu chúng ta không thấy được dự báo xác suất nào.

Quả bóng đỏ rất giống với một quả bóng golf: đường kính của nó hơi lớn hơn nhưng đại khái là giống, và sự đàn hồi của nó căn bản cũng tương tự. Nhưng quả bóng đỏ hay thực tại có thể làm những thứ mà một quả bóng golf không làm được: một số thứ là bất thường, một số không; một số thứ liên quan đến dự báo, một số không; một số thứ đã biết, một số không. Trong Bảng NAG, quả bóng golf là một mô hình tốt cho thực tại, một mô hình hữu ích cho thực tại, một mô hình không hoàn hảo cho thực tại. Chúng ta sẽ diễn giải sự phân bố này như thế nào? Không ai biết. Xin chào mừng đến với lĩnh vực nghiên cứu thống kê tiên phong. Và nó đang trở nên tốt hơn. Chúng ta luôn có thể giải thích sự phân bố như một dự báo xác suất, với điều kiện giả định thực tại là một quả bóng golf. Liệu có phải là lập lờ nước đôi không khi đưa ra những dự báo xác suất mà chúng ta biết là phụ thuộc vào một mô hình không hoàn hảo, nhưng lại xem chúng như thể phản ánh khả năng xảy ra những sự kiện tương lai, bất kể dấu vết nhỏ nào xuất hiện bên dưới dự báo?

Các dự báo nhóm không bị giới hạn vào việc sử dụng những quả bóng golf không thôi. Chúng ta có thể lấy những quả bóng cao su màu xanh với đường kính hơi nhỏ hơn và lặp lại thí nghiệm. Nếu thu được một phân bố bóng xanh tương tự như phân bố bóng golf, chúng ta có thể mạnh dạn nói rằng - đúng hơn là hy vọng rằng - những bất cập của mô hình có thể không đóng vai trò lớn trong dự báo mà chúng ta quan tâm. Ngoài ra, hai mô hình có thể chung một thiếu hụt mang tính hệ thống nào đó mà chúng ta chưa nhận thức được. Nhưng nếu phân bố bóng golf và bóng xanh khác nhau đáng kể? Khi ấy, chúng ta không thể trông cậy một cách hợp lý vào bất kỳ cái nào. Làm thế nào việc định lượng sự đa dạng của các mô hình bằng những nhóm đa mô hình này cho phép chúng ta xây dựng một dự báo xác suất cho một diễn biến duy nhất của thực tại? Nhìn vào những dự báo thời tiết theo mùa dựa trên những mô hình tốt nhất trên thế giới, chúng ta thấy sự phân bố từ mỗi mô hình có xu hướng co cụm với nhau, mỗi cái theo một cách khác nhau. Trong trường hợp này, làm sao chúng ta cung cấp sự hỗ trợ ra quyết định hay đưa ra một dự báo? Mục đích của chúng ta nên là gì? Thậm chí, chúng ta có thể nhắm chính xác đến đâu vào một mục tiêu bất kỳ nếu chỉ có những mô hình không đủ năng lực cho thực nghiệm? Nếu ngây thơ diễn giải sự đa dạng của một nhóm mô hình như một xác suất, chúng ta sẽ bị sai lầm hết lần này đến lần khác. Từ đầu, chúng ta biết các mô hình của mình không hoàn hảo, nên bất kỳ bàn luận nào về "xác suất chủ quan" cũng là một trò đánh lạc hướng: ngay từ đầu chúng ta đã không tin vào (bất kỳ) mô hình nào!

Kết luận là khá hiển nhiên: nếu những mô hình là hoàn hảo và nếu có nguồn lực như con quỷ của Laplace, chúng ta sẽ biết được tương lai. Trong khi ấy, nếu những mô hình là hoàn hảo và nếu có nguồn lực của con quỷ thế kỷ 21, sự hỗn độn sẽ giới hạn chúng ta vào những dự báo xác suất, ngay cả nếu chúng ta biết rằng những Quy luật Tự nhiên là tất định. Trong trường hợp những Quy luật Tự nhiên "đích thực" là ngẫu nhiên, chúng ta có thể mường tượng con quỷ của nhà thống kê, và nó cũng sẽ đưa ra những dự báo xác suất khả quy trách nhiệm, dù có hoặc không có hiểu biết chính xác về trạng thái hiện thời của vũ trụ. Nhưng liệu niềm tin vào sự tồn tại của những Quy luật Tự nhiên chính xác về mặt toán học - dù là tất định hay ngẫu nhiên - có kém phần mơ tưởng hơn hy vọng rằng chúng ta sẽ bắt gặp một con quỷ bất kỳ trong rừng để đưa ra những dự báo không?

Trong mọi trường hợp, có vẻ hiện nay chúng ta không biết những phương trình thích hợp cho những hệ thống vật lý dù đơn giản hay phức tạp. Nghiên cứu về hỗn độn gợi ý rằng khó khăn không nằm ở sự không chắc chắn về con số để "đưa vào" mà là việc thiếu một mô hình đủ năng lực thực nghiệm để đưa bất kỳ thứ gì vào: chúng ta có thể xử trí sự hỗn độn, nhưng không phải sự hỗn độn mà mô hình không đủ năng lực mới là thứ giới hạn tính có thể dự báo. Một mô hình có thể được cho là tốt nhất, nhưng điều đó không cho biết nó có đủ năng lực thực nghiệm không, chưa nói đến chuyện nó có hữu ích trong thực tế, hay thậm chí có an toàn không. Xét về mặt chuyên môn, các nhà dự báo có thể đang nói ra sự thật khi dùng những cụm từ đầy khôn ngoan như "giả định mô hình là hoàn hảo" hay "với thông tin tốt nhất hiện có" để diễn đạt những mô hình mà họ ngờ là căn bản đã không hoàn thiện, nhưng nếu những mô hình ấy không thể che bóng quá khứ thì chúng ta không rõ "tính không chắc chắn trong biểu diễn ban đầu" có thể mang ý nghĩa gì. Những người đổ lỗi cho sự hỗn độn vì gây ra những sai lầm trong các dự báo xác suất mà họ tạo ra dưới giả định mô hình hoàn hảo - trong khi họ biết mô hình không đủ năng lực - là những người đang quanh co với chúng ta theo nghĩa nước đôi.

10

Hỗn độn ứng dụng: Mô hình có giúp chúng ta thấy được không?

Mọi định lý đều đúng,
Mọi mô hình đều sai.
Mọi dữ liệu đều không chính xác.
Chúng ta làm gì đây?

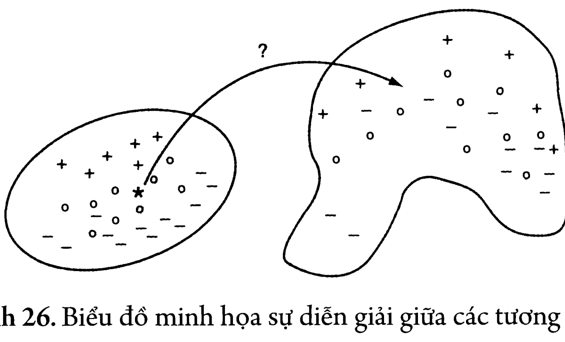
Các nhà khoa học thường không đánh giá đầy đủ món nợ của họ đối với những nhà dự báo theo thời gian thực, những người mỗi ngày đều trình bày cái nhìn của họ về tương lai. Nổi bật nhất trong số họ là những nhà dự báo thời tiết và nhà kinh tế, riêng những người đánh bạc chuyên nghiệp thì mạo hiểm quá mức. Những người giao dịch hợp đồng kỳ hạn cũng tương tự. Nghiên cứu về hỗn độn đã mở đầu việc suy nghĩ lại vấn đề dựng mô hình, làm rõ giới hạn những gì chúng ta có thể thấy thông qua mô hình. Dĩ nhiên, ý nghĩa của điều đó đối với các hệ thống toán học thì khác với các hệ thống vật lý, bởi trong hệ thống toán học, chúng ta biết có một mục tiêu để nhắm tới, trong khi ở hệ thống vật lý, điều chúng ta nhắm tới rất có thể không tồn tại.

Dựng mô hình từ nền tảng trở lên: những mô hình dựa trên dữ liệu

Chúng ta sẽ xét bốn kiểu mô hình dựa trên dữ liệu. Đơn giản nhất là những *mô hình lưu* [persistence models], cho rằng mọi thứ sẽ giữ nguyên như hiện giờ. Một biến thể động lực học đơn giản của thể loại này là *mô hình bình lưu* [advection models], giả định sự giữ nguyên của các vận tốc: trong loại mô hình này, một cơn bão di chuyển về phía đông sẽ được dự đoán là tiếp tục di chuyển về phía đông với cùng tốc độ. Fitzroy và LeVerrier đã sử dụng phương pháp này trong những năm 1800, khai thác những tín hiệu điện tín chạy nhanh hơn một cơn bão đang đến. Thứ ba là *mô hình tương tự* [analogue models]. Công trình kinh điển năm 1963 của Lorenz kết thúc bằng câu: "Trong trường hợp khí quyển thực, nếu mọi phương pháp khác thất bại, chúng ta có thể chờ đợi một sự tương tự". Một mô hình tương tự đòi hỏi một thư viện các quan sát quá khứ mà từ đó người ta phát hiện một biểu diễn trước kia tương tự như biểu diễn hiện thời. Diễn tiến đã được biết của mô hình tương tự trong lịch sử sẽ đưa ra dự báo. Chất lượng của cách tiếp cận này tùy thuộc vào việc chúng ta quan sát trạng thái tốt đến đâu và thư viện của chúng ta có chứa những tương tự đủ tốt không. Khi dự báo một hệ thống tái lặp, việc có được một tương tự tốt chẳng qua là câu hỏi tập hợp của thư viện có đủ lớn không nếu xét tới mục đích và mức độ nhiễu mà chúng ta có. Trong thực tiễn, có khi việc xây dựng thư viện không chỉ đòi hỏi sự kiên nhẫn: chẳng hạn, chúng ta tiến hành như thế nào nếu thời gian kỳ vọng cần có để quan sát sự tái lặp dài hơn quãng đời của chính mô hình?

Từ lâu, thống kê truyền thống đã khai thác ba cách tiếp cận này trong bối cảnh dự báo từ dữ liệu thống kê lịch sử. Định lý Takens gợi ý rằng đối với những hệ thống hỗn độn, chúng ta có thể làm tốt hơn bất kỳ phương pháp nào trong số chúng. Giả sử từ một thư viện, chúng ta muốn dự báo trạng thái của khí quyển vào ngày mai. Tình huống này được trình bày bằng biểu đồ ở hình 26. Phương pháp dựa trên sự tương tự có nghĩa là lấy trạng thái trong thư viện gần nhất với trạng thái khí quyển ngày hôm nay, và lấy những gì đã xảy ra ngày tiếp theo làm dự báo của chúng ta cho ngày mai. Định lý Takens gợi ý lấy một tập hợp những tương tự gần nhau và nội suy giữa các kết quả của chúng để hình thành dự báo. Những *mô hình tái tạo trễ* [delay reconstruction models] dựa trên dữ liệu như vậy có thể chứng tỏ là hữu ích nhưng không nhất thiết hoàn hảo: chúng chỉ cần thực hiện tốt hơn - hoặc đơn giản là bổ sung - cho những lựa chọn khác mà chúng ta có. Cách tiếp cận dựa trên sự tương tự vẫn phổ biến trong những dự báo thời tiết theo mùa, còn trò chơi roulette thì cho thấy một câu chuyện thành công về dựng mô hình dựa trên dữ liệu.

Đặt tiền vào một cửa thắng trong trò roulette thì dễ: tất cả những gì bạn phải làm là cược một dollar vào từng số, và mỗi lần bạn sẽ có một cửa thắng. Dĩ nhiên bạn sẽ mất tiền, vì cửa thắng



Hình 26. Biểu đồ minh họa sự diễn giải giữa các tương tự để tạo ra một dự báo trong một không gian biểu diễn dựa trên dữ liệu. Khi biết hình ảnh của từng điểm gần kề rơi vào đâu, chúng ta có thể nội suy để tạo ra một dự báo cho điểm được đánh dấu *.

sẽ cho bạn 36 dollar, trong khi bạn sẽ phải cược nhiều hơn 36 con số. Chiến lược "chơi hết" khiến bạn mất tiền trong mọi trò. Từ lâu các sòng bạc đã tính ra điều này. Việc kiếm lời đòi hỏi không chỉ mỗi lần đều đặt vào cửa thắng: nó đòi hỏi một dự báo xác suất tốt hơn tỉ lệ của nhà cái. Thật may, điều đó có thể đạt được trừ phi có những yêu cầu khắt khe về năng lực cho thực nghiệm hay tính khả quy trách nhiệm toán học.

Việc có thể đặt cược khi quả bóng đã lăn khiến trò roulette đặc biệt thú vị đối với nhà vật lý và nhà thống kê về xác suất tương đối. Giả sử bạn ghi nhận mọi vị trí mà quả bóng đi qua, thí dụ dùng ngón chân cái của bàn chân trái mỗi khi bóng đi qua số 0, và dùng ngón chân cái của bàn chân phải mỗi khi số 0 đi qua một điểm cố định trên bàn; liệu có bao nhiêu lần một cái máy tính ở gót giày của bạn có thể dự báo chính xác quả bóng sẽ rơi vào phần nào của bánh xe roulette? Dự báo đúng một nửa số lần sẽ làm lợi thế nghiêng về phía bạn: khi đúng, bạn thắng khoảng bốn lần mức tiền thua, nên thu được khoản lời gấp ba phần đặt cược. Bạn thua một nửa số lần, nên bình quân bạn kiếm được khoảng 1,5 lần số tiền đặt cược. Thế giới sẽ không bao giờ biết người ta đã thử cách này bao nhiêu lần, nhưng chúng ta có thể đặt ra giới hạn dưới là một lần: câu chuyện được kể một cách thú vị bởi Thomas Bass trong "Sòng bạc kiểu Newton" (*The Newtonian Casino*)*.

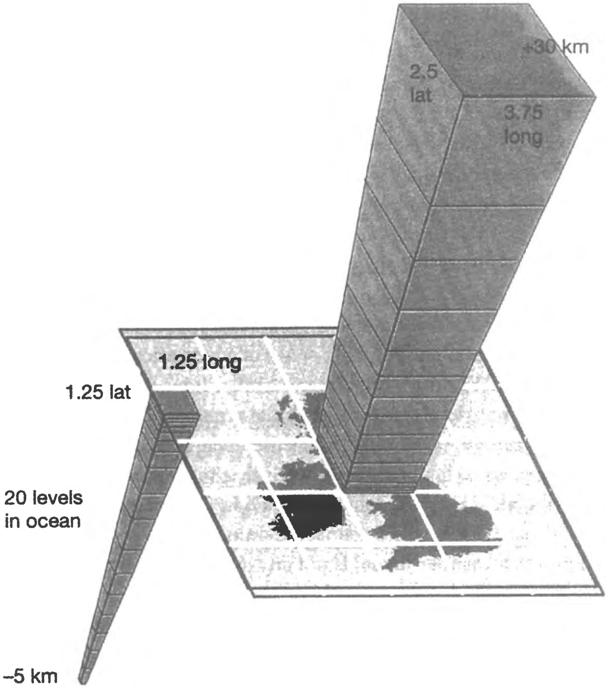
Những mô hình mô phỏng

Nếu những tương tự gần giống nhất cũng không cung cấp một dự báo đủ chi tiết thì sao? Một giải pháp khác là tìm hiểu đủ về vật lý học để xây dựng một mô hình của hệ thống từ "những nguyên lý đầu tiên". Những mô hình như vậy đã chứng tỏ vô cùng có ích trong các bộ môn khoa học, nhưng chúng ta phải nhớ rời khỏi lãnh địa của mô hình để trở lại, so sánh những dự báo của chúng ta với các quan sát thực. Rất có thể chúng ta có mô hình tốt nhất, nhưng mô hình ấy có bất kỳ giá trị nào trong việc ra quyết định hay không lại là một câu hỏi khác.

Hình 27 là biểu đồ minh họa không gian biểu diễn của một mô hình khí hậu của Cơ quan Khí tượng Anh. Không gian biểu diễn của một mô hình dự báo thời tiết số (Numerical Weather Prediction - NWP) cũng đi theo những đường tương tự, nhưng các mô hình thời tiết thường không được vận hành trong thời gian dài như các mô hình khí hậu, nên người ta thường đơn giản hóa chúng bằng cách cho rằng những thứ

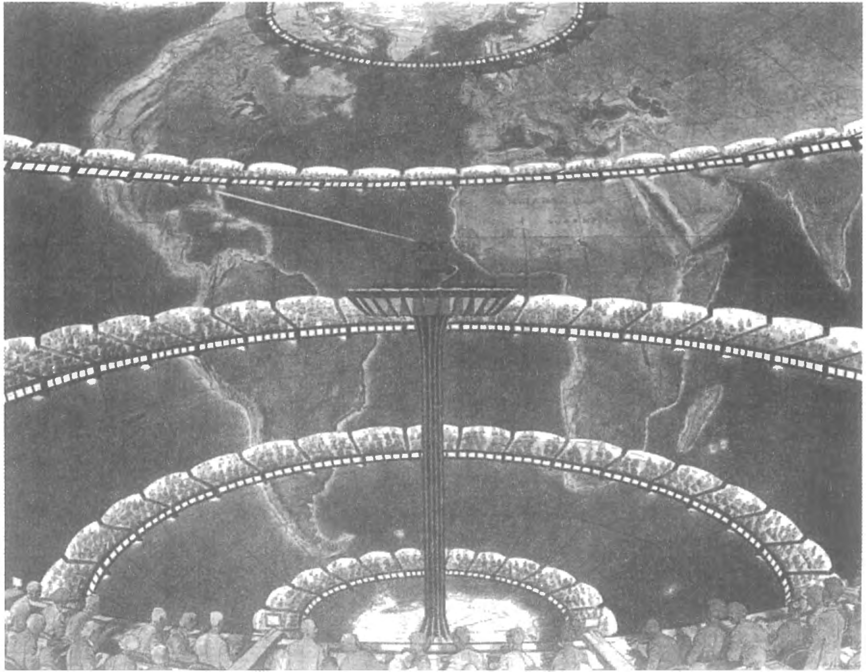
---

* Thomas Alden Bass (sinh năm 1951), nhà văn Mỹ.



Hình 27. Một sơ đồ phản ánh cách thức những mô hình thời tiết và khí hậu phân chia khí quyển và đại dương thành những "điểm lưới". Ở đây, mỗi điểm lưới trong khí quyển biểu diễn một hình vuông với kích thước xấp xỉ 250 km x 250 km, nghĩa là khoảng sáu điểm sẽ bao trùm toàn bộ nước Anh như trong hình trên.

thay đổi từ từ như đại dương, băng của biển hay việc sử dụng đất là những hằng số. Dù việc minh họa bằng biểu đồ làm mô hình trông tinh vi hơn những ánh xạ đơn giản của các chương trước, nhưng một khi được chuyển vào máy tính, quá



Hình 28. Hiện thực hóa giấc mơ của Richardson, trong đó những máy tính con người làm việc song song ở quy mô lớn để tính toán thời tiết trước khi nó xảy ra. Hãy để ý người điều khiển ở bục trung tâm đang chiếu một ánh sáng về phía bắc Florida, có lẽ muốn báo rằng những máy tính ở đó đang làm chậm dự án (hoặc có lẽ thời tiết ở đó quá rắc rối để tính toán?).

trình lặp một mô hình thời tiết trên thực tế cũng không phức tạp hơn, mà chỉ nhiều khâu hơn. Khí quyển, đại dương hay vài thước đầu tiên của vỏ trái đất (trong một số mô hình) sẽ được chia thành những ô. Những biến số của mô hình như nhiệt độ, áp suất, độ ẩm, tốc độ gió v.v... được định nghĩa bởi một số trong mỗi ô. Do mỗi ô của lưới đều chứa một mục nhập cho mỗi biến số, nên biểu diễn của mô hình có thể khá lớn, có những biểu diễn với trên 10 triệu phần tử. Việc cập nhật biểu diễn của mô hình là một quá trình không phức tạp nếu không nói là buồn tẻ: người ta chỉ việc áp dụng quy tắc cho từng phần tử, và lặp đi lặp lại. Đây là những gì Richardson đã thực hiện thủ công, và mất nhiều năm để dự báo trước một ngày. Các tính toán tập trung vào những ô "lân cận", nên Richardson đã có ý tưởng rằng một căn phòng đầy máy tính được sắp xếp như trong hình 28 có thể tính toán thời tiết nhanh hơn nó xảy ra. Vào những năm 1920, máy tính của Richardson là những con người. Những siêu máy tính số đa xử lý ngày nay ít nhiều sử dụng cơ chế phối hợp tương tự. Những mô hình NWP là những mã máy tính phức tạp nhất từng được viết và thường tạo ra những mô phỏng giống một cách đáng kinh ngạc với thực tế. Nhưng cũng như mọi mô hình, chúng là những mô tả không hoàn hảo về những hệ thống thế giới thực mà chúng nhắm đến, và các quan sát mà chúng ta sử dụng để vận hành chúng là có nhiễu. Vậy chúng ta sẽ sử dụng những mô phỏng có giá trị ấy theo cách nào để quản lý công việc của mình? Liệu ít nhất chúng ta có biết nên trông cậy đến đâu vào dự báo của hôm nay để biết được tuần sau?

Những hệ thống dự báo thời tiết nhóm

> Thông tin EPS* gần nhất cho thấy phía bắc nước Pháp có lợi thế hơn Cornwall. Anh có đại lý du lịch nào có thể tư vấn về đặt vé phà không? Tim
>
> (email ngày 5 tháng 8 năm 1999)

Năm 1922, những trung tâm dự báo thời tiết hoạt động ở cả hai phía của Đại Tây Dương đã có một bước tiến lớn: họ không còn cố gắng nói chính xác thời tiết sẽ như thế nào vào tuần sau. Trong nhiều thập kỷ, họ đã chạy những mô phỏng máy tính mỗi lần một ngày. Khi máy tính trở nên nhanh hơn, các mô hình đã trở nên ngày một rắc rối hơn, chỉ bị hạn chế bởi nhu cầu đưa ra dự báo từ sớm nhất có thể trước khi thời tiết đến. Cách thức vận hành "đưa ra suy đoán tốt nhất" này đã chấm dứt vào năm 1922: thay vì

---

* Ensemble prediction system, hệ thống dự báo nhóm.

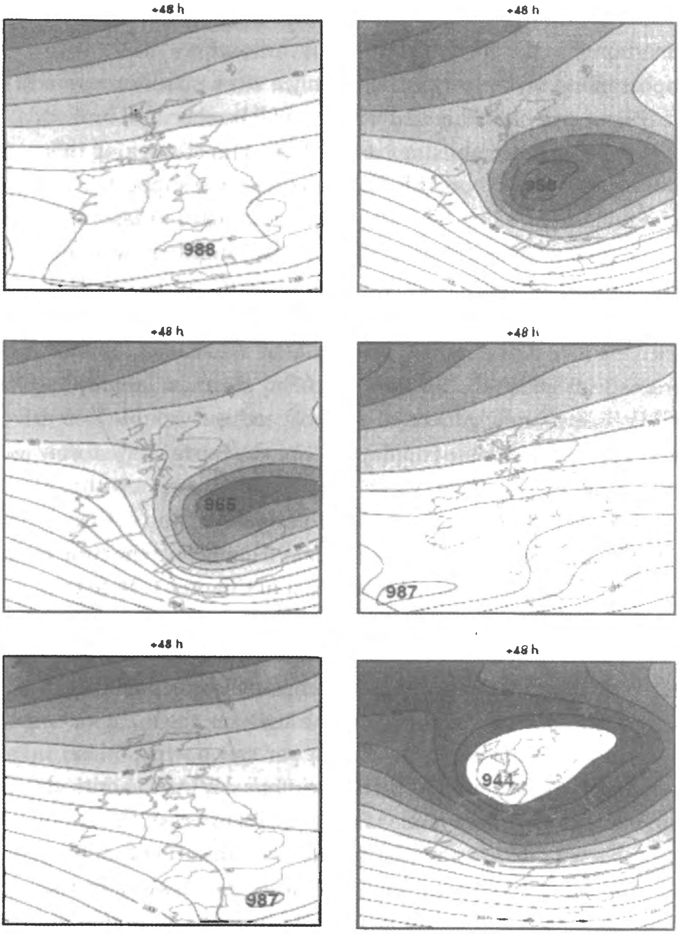
chạy một lần những mô phỏng máy tính rắc rối nhất và sau đó quan sát xem thực tế có diễn ra theo hướng khác không, một mô hình ít phức tạp hơn một chút sẽ được chạy vài chục lần. Mỗi thành phần của nhóm được khởi tạo ở một biểu diễn hơi khác. Các nhà dự báo sau đó quan sát nhóm mô phỏng này phân kỳ xa nhau như thế nào trong quá trình chúng diễn tiến theo thời gian về phía tuần tới, và sử dụng thông tin này để lượng hóa *độ tin cậy* [reliability] của dự báo cho mỗi ngày. Đây là một Hệ thống dự báo nhóm [Ensemble Prediction System].

Bằng cách tạo ra một ***dự báo nhóm*** [ensemble forecast] hay rổ dự báo, chúng ta có thể khảo sát những phương án thay thế nhau, nhất quán với kiến thức hiện tại về khí quyển và về các mô hình. Điều này tạo ra những lợi thế đáng kể cho việc hỗ trợ đưa ra những quyết định sáng suốt. Năm 1928, Sir Arther Eddington đã dự báo một nhật thực "thấy được ở khắp Cornwall" vào ngày 11 tháng 8 năm 1999. Tôi đã muốn thấy nhật thực này. Tim Palmer cũng vậy. Ông là trưởng bộ phận Dự báo xác suất tại Trung tâm Dự báo thời tiết trung hạn châu Âu (European Centre for Medium-range Weather Forecasts), hay ECMWF ở Reading, Anh. Khi nhật thực đến gần, có vẻ Cornwall sẽ bị tối sầm. Email từ Tim trích ở đầu mục này được gửi sáu ngày trước nhật thực: chúng tôi đã khảo sát dự báo nhóm cho ngày 11, và thấy số thành phần nhóm gợi ý trời quang ở Pháp vượt quá con số tương ứng cho Cornwall. Điều tương tự cũng xảy ra vào ngày 9, và chúng tôi rời Anh đến Pháp bằng phà. Tại đó, chúng tôi đã thấy nhật thực. Kết quả ấy có được là do chúng tôi đã tin cậy vào EPS, do phút cuối đã hăm hở tìm nơi quan sát rõ hơn dựa vào kỹ năng lái xe của Tim trên những con đường nông thôn chật hẹp của nước Pháp với một chiếc xe hơi tay lái thuận, đó là chưa kể cặp kính tối để xem nhật thực của ông. Nghiên cứu về hỗn độn trong mô hình của chúng tôi cho thấy sự không chắc chắn về trạng thái hiện thời của khí quyển khiến không thể nói chắc - dù chỉ trước một tuần - rằng nhật thực sẽ được thấy ở đâu, và ở đâu nó sẽ bị mây che phủ. Bằng cách sử dụng một dự báo nhóm với mục đích lần theo sự không chắc chắn này, EPS giúp đưa ra một quyết định hiệu quả: chúng tôi đã thấy nhật thực. Chúng tôi đã không phải giả định bất kỳ điều gì về sự hoàn hảo của mô hình, và không có những phân bố xác suất thấy được.

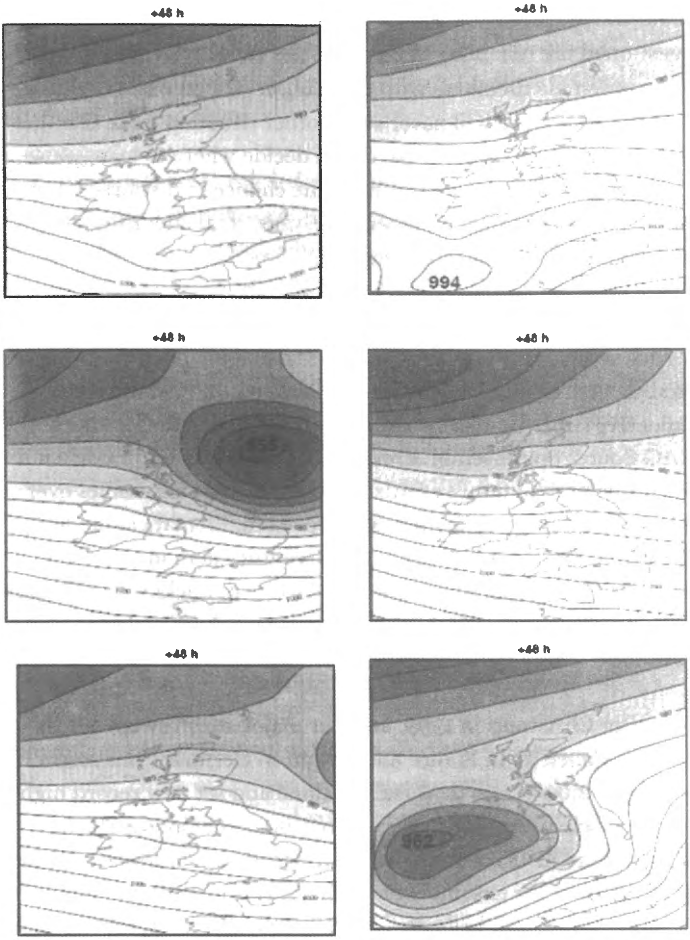
EPS được ứng dụng lần đầu tiên vào năm 1922, nên không có dự báo nhóm nào được tạo ra cho cơn bão Ngày của Burn vào tháng 1 năm 1990. ECMWF đã nhiệt tình tạo ra một dự báo nhóm áp dụng cho quá khứ, sử dụng dữ liệu có sẵn từ hai ngày trước khi cơn bão Ngày của Burn ập đến. Hình 4 trình bày cơn bão như được nhìn nhận trong một mô hình thời tiết hiện đại - được gọi là một *phân tích* [analysis] - cùng với một dự báo từ hai ngày trước, chỉ sử dụng dữ liệu ở trước thời điểm có những quan sát quyết định của tàu như chúng ta đã bàn trong chương 1. Chúng ta thấy trong dự báo không có cơn bão nào. Hình 29 trình bày mười hai dự báo khác của một dự báo nhóm cũng từ hai ngày trước cơn bão. Một số cho thấy có bão, một số không. Thành phần thứ hai của nhóm ở hàng đầu trông giống rõ rệt với phân tích. Thành phần ở dưới nó hai hàng có một dáng vẻ như siêu bão, trong khi những thành phần khác cho thấy một ngày mùa đông bình thường của nước Anh. Những quan sát quyết định của tàu được thực hiện sau EPS này, nên dự báo nhóm hẳn đã cảnh báo về một cơn bão có khả năng xảy ra, qua đó giảm đáng kể áp lực lên người dự báo can thiệp. Với những thời gian dẫn trước* dài hơn, dự báo nhóm từ ba ngày trước cơn bão Ngày của Burn có những thành phần cho thấy có bão ở Scotland, và thậm chí có một thành phần của dự báo nhóm từ bốn ngày trước cho thấy một cơn bão lớn đang ở gần. Như vậy dự báo nhóm cung cấp sự cảnh báo sớm.

---

* Thời gian từ ngày dự báo đến ngày sự kiện xảy ra.



Hình 29. Một dự báo nhóm từ mô hình thời tiết ECMWF, hai ngày trước cơn bão Ngày của Burn: một số cho thấy có bão, một số không. Không giống như phương pháp "đưa ra suy đoán tốt nhất" được trình bày ở hình 14, ở đây chúng ta có một số cảnh báo trước về cơn bão.


+48 h
+48 h
994
+48 h
+48 h
+48 h
+48 h

Với mọi khoảng thời gian dẫn trước, chúng ta đều phải đối mặt với hiệu ứng Burn: tập hợp những "quả bóng golf" thời tiết theo mô hình ECMWF cho thấy sự đa dạng trong động thái của mô hình*, giúp chúng ta khi phải "suy đoán và sợ hãi", nhưng nó không thực sự lượng hóa tính không chắc chắn về tương lai trong thế giới thực. Thật ra chúng ta có thể mở rộng tính đa dạng này. Nếu có đủ sức mạnh tính toán và đã chất vấn độ tin cậy của những quan sát nhất định, chúng ta có thể vận hành một số thành phần của nhóm bằng những quan sát đó, trong khi bỏ qua chúng ở những thành phần khác. Sẽ không bao giờ có một tình huống khác tương đối giống với cơn bão Ngày của Burn vào năm 1990. Chúng ta có thể quyết định sẽ lấy những quan sát tương lai ở đâu để tối đa hóa cơ hội nhận ra những thành phần thực tiễn nhất của dự báo nhóm: liệu đó là những thành phần cho thấy tương lai có bão, hay những thành phần không cho thấy điều đó?

Thay vì lãng phí quá nhiều sức lực để cố xác định mô hình "tốt nhất", có thể thấy rằng những thành phần của nhóm từ các mô hình khác nhau sẽ có giá trị hơn một mô phỏng từ một siêu mô hình vô cùng đắt đỏ. Nhưng không nên quên những bài học của Bảng NAG: các nhóm tiết lộ

* Sự phân kỳ của những thành phần khác nhau của dự báo nhóm.

tính đa dạng của mô hình, không phải xác suất của những sự kiện tương lai. Chúng ta có thể khảo sát các dự báo nhóm theo những điều kiện ban đầu, giá trị tham số hay thậm chí theo cấu trúc toán học của mô hình, nhưng xem ra chỉ có con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta mới có thể tạo ra những dự báo xác suất hữu dụng như vậy. Thật may, một hệ thống dự báo nhóm (EPS) có thể cho chúng ta biết nhiều điều và gia tăng giá trị mà không cần cung cấp những xác suất hay được sử dụng để ra quyết định.

Ngay sau Giáng sinh năm 1999, một cơn bão lớn khác đã quét qua châu Âu. Được gọi là T1 ở Pháp và Lothar ở Đức, cơn bão này làm bật gốc 3000 cây chỉ riêng ở Versailles nói riêng, và gây ra mức đòi bảo hiểm bồi thường cao kỷ lục ở châu Âu. Bốn mươi hai giờ trước cơn bão, ECMWF đã chạy hệ thống dự báo nhóm gồm 51 thành phần như thường lệ. Mười bốn thành phần của dự báo nhóm cho thấy có bão. Người ta dễ có xu hướng quên rằng đây chẳng là gì ngoài những quả bóng golf trên một bảng NAG, và diễn giải điều này như thể nói lên một xác suất 28% xảy ra một cơn bão lớn. Xu hướng ấy nên bị kiềm chế, nhưng ở đây chúng ta lại có một dự báo EPS có giá trị lớn khác. Việc chạy một lần một mô hình thực tiễn hơn và rắc rối hơn có thể đã cho thấy một cơn bão, nhưng cũng có thể không: tại sao lại chọn khả năng không thấy bão khi một dự báo nhóm có thể lượng hóa khả năng ấy? Dự báo nhóm rõ ràng là một ý tưởng hợp lý, nhưng nói một cách chính xác, chúng ta nên phân bổ nguồn lực hữu hạn ra sao giữa việc sử dụng một mô hình tốn kém hơn và việc tạo ra một nhóm lớn hơn? Câu hỏi nghiên cứu đầy thiết thực này vẫn bỏ ngỏ. Hiện thời, dự báo nhóm ECMWF sẽ định kỳ cung cấp một cái nhìn về những kịch bản khác nhau cho tương lai, sử dụng mô hình của chúng ta với giá trị tăng thêm đáng kể.

Một câu hỏi cũng bỏ ngỏ khác là làm thế nào truyền đạt thông tin này của dự báo nhóm mà không cần cho công chúng thấy hàng tá những bản đồ thời tiết? Ở New Zealand, nơi thời tiết khắc nghiệt là khá phổ biến, Cơ quan khí tượng định kỳ sẽ đưa ra những phát biểu hữu ích mang tính xác suất trên website của họ, chẳng hạn như "cơ hội hai trên năm". Điều này làm tăng đáng kể giá trị của một mô tả về sự kiện có khả năng xảy ra. Dĩ nhiên, các nhà khí tượng học thường biểu lộ sự quan tâm quá mức tới thời tiết khắc nghiệt, trong khi các công ty năng lượng thì sẵn sàng khai thác giá trị kinh tế đáng kể trong việc rút ra thông tin hữu ích về thời tiết bình thường hơn hàng ngày. Và những người trong các lĩnh vực có rủi ro hoạt động gắn với thời tiết cũng bắt đầu làm theo cách tương tự.

Sự hỗn độn và biến đổi khí hậu

> Khí hậu là những gì bạn kỳ vọng. Thời tiết là những gì bạn có được.
>
> Robert Heinlein, *Time Enough for Love* (1974)*

Dựng mô hình khí hậu khác biệt căn bản với dự báo thời tiết. Hãy nghĩ tới thời tiết tuần đầu tiên của tháng 1 trong một năm tới. Ở Australia sẽ là giữa hè, và là giữa mùa đông ở bắc bán cầu. Chỉ riêng điều đó đã cho chúng ta thấy phạm vi nhiệt độ có thể là như thế nào: tập hợp các kỳ vọng này chính là khí hậu - một cách chuẩn mực, nó phản ánh xác suất tương đối của mọi dạng thời tiết mà người ta nghĩ ra. Nếu chúng ta tin vào thuyết tất định vật lý thì thời tiết của tháng 1 sắp tới là đã được định trước. Cho dù như vậy, quan niệm của chúng ta về tập hợp khí hậu vẫn có giá trị, bởi những mô hình hiện tại không đủ khả năng nhận ra tương lai được định trước đó. Một dự báo thời tiết nhóm lý tưởng sẽ lần theo sự tăng lên của bất kỳ tính không chắc chắn nào về trạng thái của khí quyển, cho đến khi nó trở nên không thể phân biệt với phân bố khí hậu

---

* Robert Anson Heinlein (1907 - 1988), nhà văn khoa học viễn tưởng Mỹ.

tương ứng. Tất nhiên, với những mô hình không hoàn hảo, điều này không hẳn thường xảy ra, bởi lẽ tập hợp các mô phỏng của chúng ta diễn tiến về phía điểm thu hút của mô hình chứ không phải về phía điểm thu hút của thế giới thực - nếu thứ ấy có tồn tại. Ngay cả với một mô hình hoàn hảo và bỏ qua mọi tác động từ ý chí tự do của con người như Eddington đã từng đề cập, những dự báo xác suất chính xác dựa trên các điều kiện hiện thời của trái đất cũng sẽ bị trở ngại bởi những ảnh hưởng đang phát ra từ mặt trời, hay những ảnh hưởng sẽ đến từ bên ngoài hệ mặt trời mà đến giờ chúng ta còn chưa biết, kể cả về mặt nguyên lý.

Dựng mô hình khí hậu còn khác với dự báo thời tiết ở chỗ nó thường chứa đựng một thành phần "sẽ ra sao nếu". Thay đổi lượng carbon dioxide (CO_2) và những khí nhà kính khác trong khí quyển cũng tương tự như thay đổi tham số α trong Ánh xạ Logistic: khi giá trị tham số bị thay đổi, bản thân điểm hấp dẫn cũng thay đổi. Nói cách khác, trong khi các nhà dự báo thời tiết cố gắng diễn giải một phân bố bóng golf để biết được đôi điều ngụ ý về một lần rơi duy nhất của một quả bóng cao su đỏ trong Bảng NAG ở hình 25, các nhà dựng mô hình khí hậu còn đưa thêm rắc rối bằng cách hỏi điều gì sẽ xảy ra nếu những cái đinh bị di chuyển lung tung.

Việc nhìn vào một lần vận hành duy nhất của một mô hình khí hậu đem đến những nguy cơ giống như chỉ nhìn vào một dự báo cho Ngày của Burn năm 1990, tất nhiên trong trường hợp khí hậu, hậu quả của sự tự tin thái quá đến ngây thơ như vậy sẽ lớn hơn nhiều. Không trung tâm tính toán nào trên thế giới có năng lực vận hành những dự báo nhóm lớn cho các mô hình khí hậu. Tuy nhiên, những thí nghiệm như vậy vẫn có thể thực hiện bằng cách khai thác năng lực xử lý nền của các máy tính cá nhân (PC) gia đình trên khắp trái đất. Hàng ngàn mô phỏng đã tiết lộ rằng trong một mô hình khí hậu tân tiến nhất cũng tồn tại một mức độ đa dạng lớn đến đáng ngạc nhiên, cho thấy sự không chắc chắn của chúng ta về tương lai của khí hậu trong thế giới thực ít nhất cũng là rất lớn. Những kết quả này góp phần vào việc cải tiến các mô hình hiện tại. Chúng không cung cấp bằng chứng cho thấy những mô hình khí hậu được tạo dựng hiện nay có thể làm rõ những câu hỏi về chi tiết từng vùng - đây là những thông tin mà nếu có sẽ vô cùng giá trị cho việc ra quyết định. Một đánh giá thẳng thắn về những hạn chế của các mô hình khí hậu ngày nay cũng không khiến người ta nghi ngờ một thực tế được đồng thuận rộng rãi rằng dữ liệu của quá khứ gần đây đã cho thấy sự ấm lên đáng kể.

Tính đa dạng trong các mô hình của chúng ta lớn đến đâu? Điều này tất nhiên tùy thuộc vào những biến số mô hình mà bạn khảo sát. Nói về nhiệt độ trung bình trên khắp hành tinh, chúng ta thấy một bức tranh nhất quán, đó là sự ấm lên. Một số lượng đáng kể các thành phần của dự báo nhóm cho thấy sự ấm lên lớn hơn rất nhiều so với những gì được xem xét trước đây. Còn nói về chi tiết theo vùng, giữa các thành phần của nhóm có sự thay đổi lớn. Khó mà phán xét tính hữu dụng của lượng mưa ước tính cho việc ra quyết định, kể cả lượng mưa hàng tháng trên toàn châu Âu. Trong ngữ cảnh khí hậu, từ những dự báo chứa đựng thông tin hữu ích cho người ra quyết định, làm thế nào người ta nhận ra đâu là những dự bạo tốt nhất hiện có?

Trong đời thực, mức carbon dioxide (CO_2) và những nhân tố khác là không ngừng thay đổi, thời tiết và khí hậu hòa trộn vào nhau thành một hiện thực duy nhất của một thử nghiệm thoáng qua chỉ xảy ra một lần. Các nhà dự báo thời tiết thường thấy mình là người cố gắng rút ra thông tin hữu ích từ dự báo nhóm trước khi nó lan ra qua "điểm thu hút thời tiết". Các nhà tạo dựng mô hình khí hậu phải đối mặt với những câu hỏi khó khăn, như cấu trúc của điểm thu hút ấy sẽ thay đổi như thế nào nếu giả sử lượng carbon dioxide (CO_2) trong khí quyển tăng gấp đôi rồi được giữ không đổi. Những năm 1960, Lorenz đã tích cực nghiên cứu trong lĩnh vực này, ông cảnh báo rằng các vấn đề về sự ổn định cấu trúc và những thứ nhất thời kéo dài sẽ làm phức tạp sự dự báo khí hậu, và ông minh họa tác động của chúng trong những hệ thống không rắc rối hơn bao nhiêu so với những ánh xạ đã định nghĩa ở Chương 3.

Các mô hình thời tiết của chúng ta là không hoàn hảo, bởi vậy những dự báo nhóm của chúng thực ra không diễn tiến về phía những phân bố khí hậu thực. Bên cạnh đó, các tính chất của hệ thống khí hậu trái đất là không ngừng thay đổi, nên ngay từ đầu, việc nói về một "phân bố khí hậu thực" không ngừng thay đổi và không thể quan sát đã là không mấy ý nghĩa. Liệu một thứ như vậy có thể tồn tại bên ngoài lãnh địa mô hình được không? Nhưng ngoài điều đó ra, việc đi tới hiểu biết về hỗn độn và động lực phi tuyến đã cải thiện cả sự thiết kế thực nghiệm cũng như cách thức tiến hành nghiên cứu khí hậu, cho phép các nhà làm chính sách đưa ra quyết định sáng suốt hơn. Có lẽ quan trọng nhất, nó đã cho thấy rõ rằng những quyết định khó khăn sẽ phải được đưa ra dưới sự không chắc chắn. Tính không chắc chắn này không được kiềm chế chặt chẽ, và nó cũng chỉ có thể được lượng hóa bởi những mô hình không hoàn hảo - hai thực tế này đưa ra lời bào chữa cho việc không hành động. Mọi quyết định khó khăn về chính sách được đưa ra trong ngữ cảnh của hiệu ứng Burns.

Sự hỗn độn trong thương mại: những cơ hội mới trong ngành Phynance

Khi một số lớn người đang chơi một trò chơi với những quy tắc rõ ràng nhưng động lực học không được biết, khó mà phân biệt những người thắng bằng kỹ năng với những người thắng do may mắn. Đây là một vấn đề căn bản trong việc đánh giá những nhà quản lý quỹ đầu tư thanh khoản linh hoạt [hedge fund]* và việc cải tiến những mô hình thời tiết, bởi lẽ cách tính điểm truyền thống có thể gây bất lợi cho lối chơi khéo léo dựa vào xác suất. Công ty Dự báo (Prediction Company), hay PredCo, được thành lập trên tiền đề phải có một cách dự báo thị trường kinh tế tốt hơn những phương pháp thống kê tuyến tính,

---

* Hedge fund là loại quỹ đầu cơ có tính đại chúng thấp và không bị quản chế quá chặt.. Thường các quỹ loại này chỉ giao dịch với một số lượng hạn chế các nhà đầu tư vào quỹ, vì thế mỗi nhà đầu tư phải bỏ ra những khoản tiền đầu tư rất lớn đóng theo phương thức "gọi vốn không đại chúng" (private placement). Ngược với các quỹ hedge fund là các quỹ có tính đại chúng cao, đông đảo dân cư có thể tham gia đầu tư và thường được xếp vào nhóm các quỹ hỗ tương (mutual funds).

vốn chi phối tài chính định lượng từ hai thập kỷ trước. PredCo khởi đầu trên một con đường khác, được khai phá bởi Doyne Farmer, Norm Packard cùng một số nhà động lực học phi tuyến trẻ tuổi tài ba thời đó.

PredCo là một ví dụ về một dịch chuyển nói chung về phía *Phynance***, đưa vào những nhà vật lý toán học được đào tạo bài bản để xem xét các vấn đề dự báo trong tài chính, vốn từ xưa đến nay là lĩnh vực dành riêng cho các nhà thống kê. Thị trường chứng khoán có hỗn độn không? Bằng chứng hiện thời cho thấy những mô hình tốt nhất của chúng ta về thị trường căn bản là mô hình ngẫu nhiên, nên câu trả lời là "không". Nhưng chúng cũng không tuyến tính. Để lấy một thí dụ, nghiên cứu về hỗn độn đã góp phần vào những phát triển thú vị tại giao diện giữa thời tiết và kinh tế: nhiều thị trường bị tác động sâu xa bởi thời tiết, một số thậm chí bị tác động bởi những dự báo thời tiết. Nhiều nhà phân tích quá sợ rằng họ có thể bị sự ngẫu nhiên đánh lừa, đến mức đã trung thành một cách có ý thức với những mô hình khá đơn giản và thuần túy ngẫu nhiên, bỏ qua sự thật hiển nhiên rằng một số dự báo thời tiết nhóm chứa đựng thông tin hữu ích. Đối với các công ty

** Ghép hai từ "Physical" (vật lý) và "Finance" (tài chính).

năng lượng, thông tin về "tính không chắc chắn của thông tin thời tiết" đang được sử dụng hàng ngày để tránh "đuổi theo dự báo": mua cao, bán thấp, rồi lại mua giá cao cùng khối lượng gas ấy khi dự báo thời tiết cho nhiệt độ của ngày thứ Sáu sắp tới nhảy xuống, nhảy lên, rồi lại nhảy xuống... cứ thế đưa nhu cầu điện kỳ vọng cho thứ Sáu tới đi theo mỗi lần nhảy.

Nghiên cứu về hỗn độn đem đến những hiệu quả còn hơn cả lợi nhuận ngắn hạn. Ngành *Phynance* đang có những đóng góp đáng kể vào việc phân bổ tốt hơn những hàng hóa dễ hỏng theo nhu cầu liên quan đến thời tiết, vào sự chuyên chở bằng tàu thủy, xe lửa, xe tải và vào dự báo nhu cầu nói chung. Những dự báo xác suất tốt hơn về các biến động hỗn độn của gió và mưa làm tăng đáng kể năng lực của chúng ta trong việc sử dụng năng lượng có thể tái tạo, giảm nhu cầu giữ các máy phát chạy bằng nhiên liệu hóa thạch ở cơ chế "chờ", ngoại trừ vào những ngày có độ tin cậy thật sự thấp.

Lui về một thực tại đơn giản hơn

Các hệ thống vật lý đã truyền cảm hứng cho việc nghiên cứu các hệ thống động lực hỗn độn, và giờ đây chúng ta hiểu bằng cách nào con quỷ

Laplace của thế kỷ 21 sử dụng mô hình hoàn hảo của nó để tạo ra những dự báo xác suất khả quy trách nhiệm cho những hệ thống hỗn độn. Dù thuần túy dựa trên dữ liệu hay bắt nguồn từ những "Quy luật của Tự nhiên" ngày nay, các mô hình mà chúng ta có trong tay cũng là không hoàn hảo. Chúng ta phải hài lòng cả với tính không chắc chắn trong quan sát lẫn năng lực không đầy đủ của mô hình. Nếu diễn giải một dự báo nhóm về thế giới thực như thể nó là một dự báo xác suất dựa trên mô hình hoàn hảo của một hệ thống toán học, chẳng khác nào dùng những sai lầm ngớ ngẩn trong dự báo để rút ra những kết luận ngây thơ nhất. Liệu chúng ta có tìm được một hệ thống thế giới thực duy nhất nào, trong đó sự hỗn độn đặt ra giới hạn cuối cùng cho những dự báo hay không?

Hệ thống khí quyển/đại dương của trái đất là một vấn đề khó khăn cho dự báo. Các nhà vật lý tránh việc hoàn toàn lui về những mô hình toán học bằng cách khảo sát các hệ thống vật lý đơn giản hơn, dựa vào đó làm nhẹ đi những thủ tục dự báo và những lý thuyết về tính chất có thể dự báo của họ. Chúng ta sẽ lần theo tiến trình của sự thoái lui này khỏi khí quyển trái đất, và khảo sát nỗ lực cuối cùng của họ, sau đó tìm hiểu một số chi tiết của những gì có trong đó. Lorenz đã nói tới những thí nghiệm "đĩa-chảo"* của Raymond Hide** để củng cố những diễn giải hỗn độn về các mô phỏng máy tính của ông hồi đầu những năm 1960. Kết quả của những thí nghiệm ấy giờ vẫn đang quay trong Khoa Vật lý của Đại học Oxford, nơi Peter Read cung cấp chất liệu thô cho những tái tạo dựa trên dữ liệu của họ. Cho đến nay, dự báo xác suất của các hệ thống chất lỏng này vẫn rất không hoàn hảo. Các nhà thí nghiệm khắp nơi đã thu được những dữ liệu giá trị cả từ các hệ thống chất lỏng lẫn các hệ thống cơ học được thúc đẩy bởi bản chất hỗn độn của những mô hình vật lý tương ứng. Những dao động trong thực tế có xu hướng nóng lên, thay đổi các tham số "cố định" của mô hình mô phỏng, trong khi đó lại rời xa những vùng của không gian biểu diễn, nơi các mô hình dựa trên dữ liệu đã được chạy thử. Ngay con xúc xắc cũng mòn dần đi một ít sau mỗi lần gieo. Bản chất của thế giới thực là như thế.

---

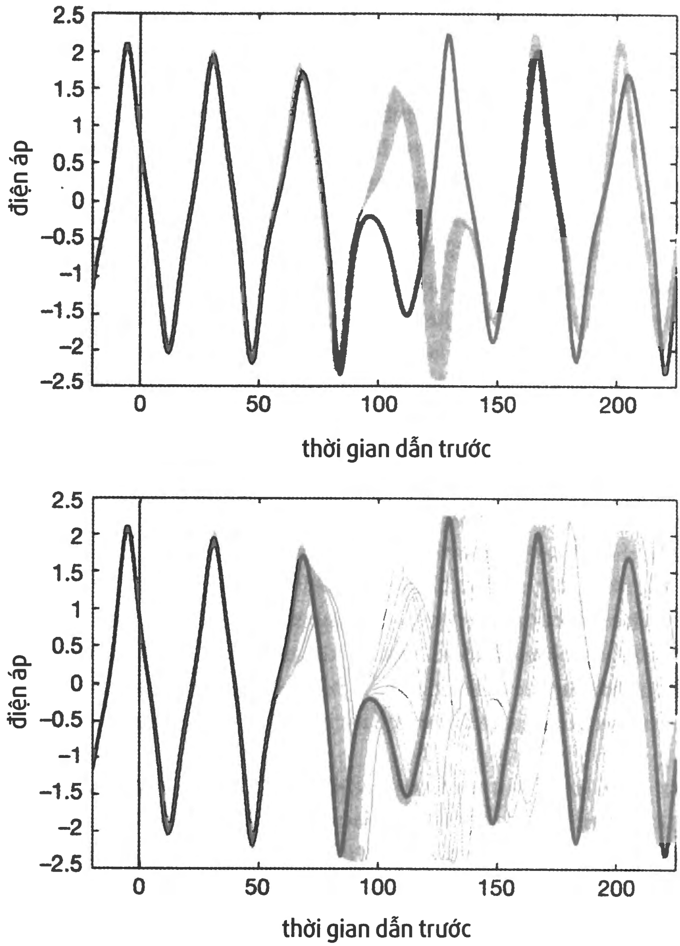
* Dish-pan experiment: một phương pháp mô phỏng ngăn đối lưu và những vận động khí quyển toàn cầu khác. Một lớp nước mỏng trong một vật đựng tròn được làm nóng ở rìa để biểu diễn đường xích đạo và làm lạnh ở trung tâm để biểu diễn vùng cực. Khi cái đĩa-chảo được xoay, nhiều vận động khác nhau được tạo ra ứng với gradient nhiệt độ xuyên tâm và tốc độ quay.

** Raymond Hide (sinh năm 1929), nhà vật lý Anh.

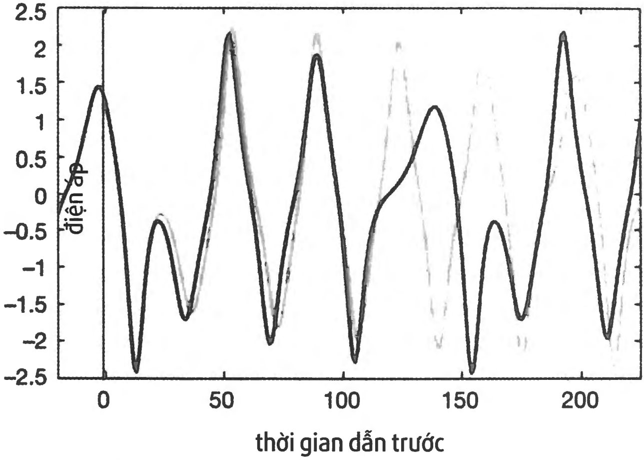
Những hệ thống vật lý cung cấp số lượng lớn dữ liệu, có cấp nhiễu quan sát thấp và những điều kiện tĩnh về vật lý có thể chứng tỏ là những hệ thống phù hợp hơn đối với các công cụ của phân tích dữ liệu phi tuyến hiện đại. Các hệ sinh thái chính là như thế. Những bộ phát laser nhanh, sạch và được phối hợp chính xác đã chứng tỏ là những nguồn tạo dữ liệu phong phú, nhưng ở đây hay khi nghiên cứu động lực học của những chất lỏng lạ lùng hơn, như helium chẳng hạn, chúng ta đều không có những mô hình dự báo khả quy trách nhiệm. Bằng nỗ lực cuối cùng, chúng ta đã tìm được các mạch điện tử: có thể cho rằng chúng là những máy tính tương tự [analogue] đơn giản. Một tác phẩm gốc nói về những dự báo nhóm thành công của các hệ thống này có khả năng sẽ bị bác bỏ vì đã lấy một hệ thống quá đơn giản. Khi chúng ta *không thể* tạo ra những dự báo khả quy trách nhiệm cho những hệ thống thế giới thực đơn giản nhất này, điều đó cũng nói lên rất nhiều.

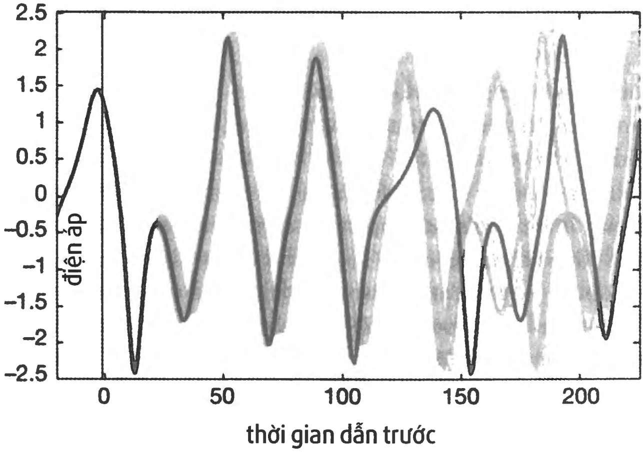
Hình 30 trình bày những dự báo nhóm của điện áp quan sát được trong một mạch mô phỏng hệ thống Moore-Spiegel.

Đây là những dự báo từ hai mô hình khác nhau. Ở mỗi đồ thị, đường đậm màu đen biểu diễn những quan sát mục tiêu do mạch tạo ra,



Hình 30. Những dự báo nhóm của mạch Moore-Spiegel do Machete thiết kế. Đường đậm biểu thị quan sát, đường nhạt là những thành phần của nhóm. Dự báo khởi đầu ở thời điểm zero. Hai khung đồ thị bên trái trình bày những dự báo nhóm cho cùng dữ liệu nhưng được tạo ra bởi hai mô hình khác nhau; chúng ta thấy dự báo nhóm ở đồ thị hàng dưới





có thể tóm bắt được dáng điệu của mạch, kể cả khi mô hình ở khung đồ thị hàng trên rời xa nó ở gần thời điểm 100. Các dự báo từ điều kiện ban đầu thứ hai, cũng theo hai mô hình nói trên, được trình bày ở hai đồ thị bên phải, cho thấy hai dự báo nhóm theo hai mô hình đều thất bại ở thời điểm gần giống nhau.

còn mỗi đường nhạt là một thành phần của nhóm; các dự báo khởi đầu ở thời điểm bằng 0. Dự báo nhóm được tạo ra chỉ từ những quan sát thực hiện trước thời điểm đó.

Hai đồ thị ở các hàng trên biểu diễn kết quả từ Mô hình 1, hai đồ thị ở các hàng dưới biểu diễn kết quả từ Mô hình 2. Hãy nhìn vào hai đồ thị bên trái, biểu diễn những dự báo đồng thời của từng mô hình. Như chúng ta thấy ở đồ thị hàng trên, ngay trước thời điểm 100, mỗi thành phần của dự báo nhóm thuộc Mô hình 1 rời xa thực tại* mà không đưa ra bất kỳ sự báo trước nào. Dự báo nhóm của Mô hình 2 ở đồ thị hàng dưới thì lan xung quanh vào khoảng cùng thời điểm (hoặc là hơi sớm?), và tính đa dạng trong động thái của nhóm này trông có vẻ hữu ích cho đến tận cuối của dự báo. Trong trường hợp ấy, chúng ta không biết mô hình nào sẽ chứng tỏ là đúng, nhưng có thể thấy từ thời điểm nào chúng bắt đầu phân kỳ một cách mạnh mẽ. Ở hai đồ thị bên phải, cả hai mô hình đều thất bại vào khoảng cùng thời điểm, và căn bản theo cùng cách.

Trong mỗi trường hợp, có vẻ các dự báo cho chúng ta thấy được những quan sát có thể xảy ra trong tương lai, nhưng cả hai hệ thống dự báo

---

* Đường nhạt rời xa đường đậm.

nhóm đều không phản ánh rõ thời điểm tương lai lúc sự thấy trước ấy không còn đúng. Đâu là cách tốt nhất để chúng ta diễn giải tính đa dạng này ở một dự báo?

Việc phân tích nhiều dự báo từ những điều kiện ban đầu khác nhau cho thấy khi những dự báo nhóm này được hiểu như những dự báo xác suất, chúng không khả quy trách nhiệm. Đây dường như là một kết quả tổng quát khi sử dụng những mô hình toán học có thể gọi là hỗn độn để dự báo những hệ thống thế giới thực. Tôi không biết liệu có ngoại lệ nào khác. Nhưng may thay, sự hữu dụng không đòi hỏi rút ra những ước tính hữu ích về xác suất.

Tỉ lệ cược: chúng ta có thật sự phải chú trọng mô hình không?

Trong thế giới toán học, tỉ lệ cược [odds]** và xác suất ít nhiều là giống nhau. Trong thế giới thực thì không phải như vậy. Nếu chúng ta cộng dồn xác suất của mọi sự kiện khả dĩ, tổng các xác suất sẽ là một. Đối với bất kỳ tập hợp tỉ lệ cược xảy ra [odds-on], chúng ta có thể định nghĩa *xác suất ngầm hiểu* [implied probability] của một sự kiện từ những tỉ lệ cược xảy ra sự kiện ấy. Nếu

** Khả năng xảy ra hoặc không xảy ra.

tổng của các xác suất ngầm hiểu bằng 1, tập hợp các tỉ lệ cược xảy ra này được gọi là *tỉ lệ cược theo xác suất* [probabilistic odds]. Ngoài các bài giảng toán học, khó mà tìm được tỉ lệ cược theo xác suất ở thế giới thực. Một ý niệm liên quan là "tỉ lệ cược công bằng", theo đó các tỉ lệ cược được cố định và người ta được tùy chọn đặt cược theo hướng này hoặc hướng kia. Ý niệm này cũng cho thấy một kiểu "mơ tưởng" của tư duy tháp ngà, bởi lẽ xác suất ngầm hiểu từ những tỉ lệ cược không xảy ra [odds-against] không phải là phần bù cho xác suất ngầm hiểu từ những tỉ lệ cược xảy ra. Sự lẫn lộn về bản chất của hai quan niệm trên chủ yếu đến từ việc không thấu tỏ sự phân biệt giữa những hệ thống toán học và những hệ thống thế giới thực mà chúng tạo dựng mẫu. Tại đường đua ngựa hoặc sòng bạc, xác suất ngầm hiểu có tổng lớn hơn 1. Một bánh xe roulette kiểu châu Âu đưa ra kết quả 37/36, trong khi một bánh xe roulette kiểu Mỹ đưa ra 38/36. Ở một sòng bạc, số dư này đảm bảo có lời. Về mặt khoa học, chúng ta có thể khai thác số dư này để truyền đạt thông tin về năng lực không đầy đủ của mô hình.

Mô hình không đủ năng lực có thể khiến chúng ta đi xa khỏi những dự báo xác suất, không khác với khi tính không chắc chắn trong điều kiện ban đầu khiến chúng ta đi xa khỏi nguyên tắc bình phương nhỏ nhất trong những mô hình phi tuyến. Nhiều lý thuyết đã được phát triển để kết hợp các hệ thống dự báo xác suất vào một sự hỗ trợ ra quyết định bằng cách tối đa hóa ích lợi kỳ vọng - hoặc một tính toán nào khác về mục tiêu của người dùng. Một "dự báo xác suất" nếu không được sử dụng như vậy có lẽ không nên được gọi là một dự báo xác suất. Chắc chắn chúng ta có thể xây dựng một lý thuyết để kết hợp những hệ thống dự báo với sự hỗ trợ ra quyết định bằng đưa ra các tỉ lệ cược thay vì các xác suất.

Có vẻ khi chấp nhận rằng mô hình của mình không đủ năng lực, trong khi không biết năng lực của mô hình mà đối thủ cạnh tranh có được là đến đâu, chúng ta phải nhắm đến một tỉ lệ cược không công bằng. Nếu một hệ thống dự báo tỉ lệ cược có khả năng bù cho những thua lỗ của nó - nghĩa là hòa vốn khi được đánh giá trên mọi đề nghị cược mà vẫn đảm bảo bù đắp đủ chi phí vận hành - thì chúng ta có thể nói nó tạo ra *tỉ lệ cược bền vững* [sustainable odds]. Tỉ lệ cược bền vững sẽ hỗ trợ ra quyết định mà không dẫn tới (vẫn chưa dẫn tới) tai họa, cũng không truyền ham muốn đầu tư nhiều hơn nhằm cải thiện những tỉ lệ cược ấy để thu được thị phần lớn hơn hoặc để bù đắp chi phí vận hành.

Những dự báo nhóm theo mọi phương án

khác nhau mà người ta có thể nghĩ ra có khả năng dẫn tới tỉ lệ cược bền vững, cho phép dùng tính đa dạng trong những nhóm đa mô hình để ước tính tác động của sự thiếu hụt năng lực. Một cách lượng hóa mức độ thiếu hụt năng lực của mô hình là xét xem tổng các xác suất ngầm hiểu vượt quá một đến mức nào. Khi chúng ta hiểu một hệ thống thế giới thực nào đó ngày càng rõ hơn, câu hỏi đặt ra là liệu có thể kỳ vọng tổng xác suất ngầm hiểu của các dự báo tỉ lệ cược là bằng 1 cho *bất kỳ* hệ thống vật lý nào không?

Khi chuyển sang những hệ thống dự báo cung cấp tỉ lệ cược thay vì xác suất, sự hỗ trợ ra quyết định trong thế giới thực sẽ được giải phóng khỏi những điều kiện ràng buộc thiếu tự nhiên do xác suất, vốn chỉ có thể được định nghĩa rõ trong những hệ thống toán học. Một thực tế khó chịu nhưng không thể tránh là tỉ lệ cược bền vững sẽ tùy thuộc cả vào chất lượng mô hình của bạn lẫn của đối thủ cạnh tranh. Sự ra quyết định sẽ dễ dàng nếu có những dự báo xác suất khả quy trách nhiệm, nhưng nếu tính đa dạng trong dáng vẻ của mô hình không thể được chuyển thành một xác suất (liên quan đến ra quyết định), chúng ta sẽ không có được những dự báo xác suất. Theo đuổi sự quản lý rủi ro nhằm có được sự đơn giản là một việc liều lĩnh dại dột. Và tuy các tỉ lệ cược có thể chứng tỏ là hữu dụng trong việc ra quyết định hàng giờ hay hàng ngày, chúng ta sẽ làm gì trong bối cảnh biến đổi khí hậu, nơi có vẻ chỉ có một sự kiện có tác động lớn và không có những trường hợp kiểm chứng thật sự tương tự nào để học hỏi?

Chúng ta đã đi vào những vấn đề thực chất của dự báo khoa học trong thế giới thực. Đường phân giới xưa cũ là xác suất đang ngày càng mỏng, và không rõ chúng ta nên tiếp tục đào theo hướng nào. Nếu các hệ thống động lực hỗn độn không cung cấp một cái xẻng mới, ít nhất chúng cũng đã cho chúng ta chút thông tin.

11

Triết học trong hỗn độn

Bạn không cần tin vào mọi thứ mình tính toán.

Liệu thật sự có điều gì mới mẻ về sự hỗn độn không? Có một câu chuyện đùa xưa cũ về ba trọng tài bóng chày, bàn bạc về những thực tế cuộc sống trong trò chơi này. Trọng tài thứ nhất nói "Tôi thấy sao thì nói vậy". Người thứ hai nói "Chúng thế nào thì tôi nói vậy". Cuối cùng, người thứ ba nói "Chúng không thế nào cả cho đến khi tôi nói chúng như vậy". Nghiên cứu về hỗn độn có xu hướng buộc chúng ta đi về phía quan điểm triết học của trọng tài thứ ba.

Những phức tạp hóa của hỗn độn

Liệu những con số dự báo có chỉ tồn tại trong những mô hình dự báo mà chúng ta tạo nên?

Nếu vậy, làm thế nào so sánh chúng với những quan sát? Một dự báo thì nằm trong không gian biểu diễn của mô hình, và dù quan sát tương ứng không nằm trong không gian biểu diễn ấy, hai thứ này có phải là "trừ được cho nhau"? Đây là cách nói toán học của vấn đề "táo và cam": biểu diễn của mô hình và quan sát có đủ tương tự để chúng ta lấy cái này trừ cái kia, rút ra một khoảng cách và gọi đó là một sai số dự báo? Hay là không? Và nếu không, chúng ta sẽ đi tiếp như thế nào?

Việc đánh giá những mô hình hỗn độn đã phơi bày một sự phức tạp căn bản thứ hai, xuất hiện cả trong những mô hình phi tuyến hoàn hảo với giá trị tham số không được biết: làm thế nào xác định giá trị tốt nhất? Nếu mô hình là tuyến tính, nhiều thế kỷ kinh nghiệm và lý thuyết đã xác nhận một cách thuyết phục rằng những giá trị tốt nhất trong thực hành là những giá trị đưa ra kết quả gần nhất với dữ liệu mục tiêu, trong đó "gần nhất" được định nghĩa bằng bình phương nhỏ nhất (khoảng cách nhỏ nhất giữa mô hình và quan sát mục tiêu), càng gần càng tốt. Nếu mô hình không phải tuyến tính, trực giác của chúng ta thường cho thấy nó là sự gây rối nếu không phải là trở ngại cho sự tiến bộ. Bình phương nhỏ nhất không còn là phương pháp tối ưu, và ngay chính ý tưởng "độ chính xác" cũng phải được xem lại. Sự thật đơn giản này bị bỏ qua chừng nào thì quan trọng chừng ấy. Vấn đề này dễ được minh họa trong Ánh xạ Logistic: với công thức toán học đúng và mọi chi tiết của mô hình cho nhiễu - cụ thể là những con số ngẫu nhiên với một phân bố hình chuông - việc sử dụng bình phương nhỏ nhất để ước tính α dẫn tới những sai số hệ thống. Đây không phải là vấn đề quá ít dữ liệu hay năng lực tính toán không đủ, mà là phương pháp không phù hợp. Chúng ta có thể tính toán giải pháp bình phương nhỏ nhất tối ưu, nhưng giá trị của nó cho α là quá nhỏ ở mọi mức nhiễu. Cách tiếp cận dựa trên nguyên tắc này đơn giản không áp dụng được cho những mô hình phi tuyến, bởi lẽ các định lý làm nền tảng cho nguyên lý bình phương nhỏ nhất liên tục giả định sự phân bố hình chuông. Hình dạng của những phân bố này được giữ nguyên trong những mô hình tuyến tính, nhưng *các mô hình phi tuyến làm méo mó hình chuông*, khiến bình phương nhỏ nhất không còn phù hợp. Trong thực hành, kiểu "tư duy tuyến tính mơ tưởng" này đánh giá thấp một cách có hệ thống giá trị tham số đích thực ở mọi mức nhiễu. Những diễn giải (sai) gần đây về các mô hình khí hậu đã gặp khó khăn chính do kiểu tư duy tuyến tính mơ tưởng như vậy. Con quỷ thế kỷ 21 của chúng ta sẽ có khả năng ước tính rất chính xác giá trị α, nhưng nó không sử dụng bình phương nhỏ nhất! (Nó sẽ đi tìm bóng).

Các triết gia cũng đã tự hỏi liệu tính phức tạp do fractal có xác nhận sự tồn tại của những số thực trong tự nhiên không, có cho thấy các số vô tỉ là có tồn tại ngay cả khi chúng ta chỉ có thể thấy một vài *bit* đầu tiên của chúng hay không. Những điểm thu hút lạ không đưa ra điều gì để củng cố những lập luận vốn không thể thu được từ các hệ thống động lực tuyến tính. Mặt khác, hỗn độn cung cấp một cách thức mới để sử dụng cả mô hình - nếu mô hình đủ tốt - lẫn các quan sát nhằm định nghĩa biến số ở mức độ chi tiết khác thường, thông qua những biểu diễn dọc theo bóng lấy từ một mô hình phi tuyến đủ năng lực thực nghiệm. Nếu mô hình của chúng ta che bóng các quan sát trong một khoảng thời gian kéo dài, khi ấy mọi biểu diễn che bóng sẽ rơi vào một phạm vi giá trị rất hẹp, cho chúng ta một phương pháp xác định giá trị của những thứ có thể quan sát được như nhiệt độ chẳng hạn, sao cho tới một mức độ chính xác vượt qua ngưỡng quan niệm thông thường của chúng ta về nhiệt độ. Chúng ta sẽ không bao giờ đạt tới một số vô tỉ, nhưng một mô hình đủ năng lực thực nghiệm có thể đưa ra một định nghĩa về độ chính xác tùy ý, sử dụng các quan sát đồng thời đặt mô hình vào một vai trò không khác với người trọng tài thứ ba. Ngoài ra, sự gắn kết truyền thống giữa nhiệt độ và các phép đo lường nhiệt độ của chúng ta thông qua mô hình nhiễu vẫn an toàn, cho đến khi nào những quỹ đạo che bóng hữu ích được cho thấy là tồn tại.

Một tình huống triết học khó khăn khác nảy sinh liên quan đến vấn đề định nghĩa dự báo "tốt nhất" trong thực hành. Các dự báo mang tính xác suất đưa ra một phân bố cho mỗi dự báo, trong khi đó quan sát mục tiêu mà chúng ta dùng để xác thực sẽ luôn là một sự kiện duy nhất: không chỉ phân bố của dự báo này khác với phân bố của dự báo kia, chúng ta còn có một vấn đề "táo và cam" khác và không bao giờ có thể đánh giá, thậm chí xem một trong các phân bố của dự báo như một phân bố.

Thành công của các mô hình có xu hướng ru ngủ chúng ta với suy nghĩ vui vẻ rằng các quy luật toán học chi phối các hệ thống thế giới thực mà chúng ta quan tâm. Những mô hình tuyến tính đã tạo nên một gia đình hạnh phúc. Mô hình tuyến tính sai có thể gần với mô hình tuyến tính đúng, và được xem là như vậy ở một ý nghĩa không áp dụng được cho các mô hình phi tuyến. Nếu chỉ có những quan sát sẽ không dễ thấy rằng một mô hình phi tuyến không hoàn hảo là "gần với" mô hình đúng: có thể chúng ta thấy nó cho phép những bóng dài, nhưng nếu hai mô hình có những điểm thu hút khác nhau - và chúng ta biết điểm thu hút của những mô hình toán học rất giống nhau có thể rất khác nhau - thì chúng ta *không biết* làm thế nào tạo ra các dự báo nhóm để thu được những dự báo xác suất khả quy trách nhiệm. Chúng ta phải xét lại xem những mô hình phi tuyến sẽ tiến đến Sự thật theo cách nào trong trường hợp Sự thật có thể được gói gọn trong một mô hình "đúng" nào đó. Không có lý do khoa học nào để tin rằng có tồn tại một mô hình hoàn hảo như vậy. Triết gia có thể quay đi khỏi những vấn đề mập mờ nảy sinh trong quá trình truy cầu Sự thật, và suy ngẫm về những ngụ ý của thực tế rằng chẳng có gì ngoài những tập hợp mô hình không hoàn hảo. Triết gia có thể đưa ra lời khuyên nào cho nhà vật lý? Nếu năng lực tính toán mới cho phép tạo ra những dự báo nhóm cho mọi thứ chúng ta nghĩ ra (điều kiện ban đầu, giá trị tham số, mô hình, bộ biên dịch, cấu trúc máy tính v.v...), làm thế nào chúng ta diễn giải những phân bố thu được một cách khoa học? Hay làm thế nào phơi bày sự dại dột khi trốn tránh những vấn đề này bằng cách núp sau một mô phỏng đơn giản từ một mô hình đặc biệt phức tạp với độ giải cực cao?

Cuối cùng, hãy lưu ý rằng khi làm việc với các mô hình sai, chúng ta có thể đặt câu hỏi sai. Ai là ai trong bức tranh những người chơi bài của La Tour? Câu hỏi này giả định một mô hình trong đó mỗi người chơi chỉ có thể là một nhà toán học, một nhà vật lý, một nhà thống kê hoặc một triết gia, và phải có một đại diện của từng lĩnh vực ở quanh bàn. Có lẽ giả định này là sai. Là các nhà khoa học của thế giới thực, liệu mỗi người chơi chúng ta có thể nhận mọi vai trò?

Gánh nặng chứng minh: thật ra, cái gì là hỗn độn?

Nếu bám theo những chuẩn mực toán học về sự chứng minh, rất ít hệ thống có thể được chứng minh là hỗn độn. Định nghĩa về hỗn độn toán học chỉ có thể được áp dụng cho các hệ thống toán học ứng dụng, nên chúng ta không thể bắt đầu chứng minh một hệ thống là hỗn độn hay có quy luật. Tuy nhiên, việc mô tả các hệ thống vật lý là hỗn độn hay có quy luật vẫn hữu ích chừng nào chúng ta không lầm lẫn các mô hình toán học với những hệ thống mà chúng ta dựng mô hình để miêu tả. Khi có mô hình trong tay, chúng ta có thể thấy nó là tất định hay ngẫu nhiên, nhưng thậm chí sau khi biết nó là tất định, việc chứng minh nó là hỗn độn cũng không hề đơn giản. Tính toán lũy thừa Lyapunov là một việc khó, và có rất ít hệ thống mà chúng ta có thể thực hiện bằng phương pháp phân tích. Phải mất gần 40 năm mới có được một chứng minh toán học rằng động lực học của Hệ thống Lorenz năm 1963 là hỗn độn, nên câu hỏi liên quan đến những phương trình phức tạp hơn, chẳng hạn những phương trình được sử dụng cho thời tiết, nhiều khả năng vẫn còn bỏ ngỏ một thời gian.

Chúng ta không thể hy vọng bảo vệ tuyên bố một hệ thống vật lý là hỗn độn, trừ trường hợp loại bỏ gánh nặng chứng minh của các nhà toán học cũng như cách hiểu thông thường nhất của nó về hỗn độn. Tuy nhiên, nếu các mô hình tốt nhất của một hệ thống vật lý có vẻ là hỗn độn, nếu chúng là tất định, có vẻ tái lặp và gợi ra sự phụ thuộc nhạy bằng cách biểu lộ sự tăng nhanh của những mức không chắc chắn nhỏ, thì những thực tế này đưa ra một định nghĩa khả dụng về tính hỗn độn của một hệ thống vật lý. Một ngày nào đó, có thể chúng ta tìm được một mô tả tốt hơn cho hệ thống vật lý ấy mà không chứa những thuộc tính như vậy, nhưng khoa học nào cũng đi theo con đường tương tự. Theo ý nghĩa này, thời tiết là hỗn độn còn nền kinh tế thì không. Liệu điều đó có ngụ ý rằng nếu đưa vào mô hình thời tiết một cái gọi là bộ sinh số ngẫu nhiên, chúng ta sẽ không còn tin rằng thời tiết thực sự hỗn độn? Không hề, miễn là chúng ta chỉ muốn sử dụng một bộ sinh số ngẫu nhiên cho các lý do kỹ thuật, như giải thích những khiếm khuyết trong mô hình tính toán hữu hạn. Cũng theo mạch tư duy ấy, việc không thể sử dụng một bộ sinh số ngẫu nhiên đích thực trong các mô hình máy tính không có nghĩa là chúng ta phải xem thị trường chứng khoán là tất định. Nghiên cứu về hỗn độn đã phô bày trần trụi tầm quan trọng của sự phân biệt giữa những mô hình tốt nhất và cách tốt nhất để tạo lập mô phỏng máy tính cho những mô hình ấy. Nếu cấu trúc mô hình là không hoàn hảo, rất có thể những mô hình tốt nhất cho một hệ thống tất định lại hóa thành ngẫu nhiên!

Có lẽ câu hỏi thú vị nhất nảy sinh từ dự báo hỗn độn là câu hỏi mở về một kiểu tạo dựng mô hình thứ tư: chúng ta thấy mô hình tốt nhất không thể che bóng, chúng ta ngờ rằng không có cách nào khác để khắc phục mô hình này, dù là trong cơ chế tạo dựng mô hình tất định của nhà vật lý hay trong những cơ chế ngẫu nhiên chuẩn mực của nhà thống kê. Liệu những nghiên cứu sâu hơn về hỗn độn toán học có gợi mở một sự tổng hợp nào đó, cho phép chúng ta tiếp cận những mô hình ít ra có thể che bóng những hệ thống vật lý không?

Bóng, sự hỗn độn, và tương lai

> Một khi đã mở mắt, chúng ta có thể đi tới một tầm nhìn mới hơn về thế giới, nhưng không bao giờ trở lại được tầm nhìn cũ nữa.
>
> A. Eddinton (1927)

Toán học là cùng tột của khoa học viễn tưởng. Trong khi các nhà toán học có thể hài lòng giới hạn hoạt động của họ vào những lãnh địa trong đó mọi giả định của họ là đúng ("hầu hết mọi"), các nhà vật lý và thống kê lại phải đối mặt với thế giới bên ngoài thông qua dữ liệu trong tay và lý thuyết trong đầu. Chúng ta phải nhớ sự phân biệt này nếu muốn sử dụng những từ như "hỗn độn" khi nói chuyện với nhà toán học và các nhà khoa học. Một hệ thống toán học hỗn độn đơn giản là một thứ khác, không giống một hệ thống vật lý mà chúng ta gọi là hỗn độn. Toán học sẽ chứng minh, khoa học thì đơn giản vật lộn tìm cách miêu tả. Không nhận thức được sự phân biệt này tức là đưa những gay gắt không cần thiết vào cuộc tranh luận. Trong tranh luận không có bên nào đang "thắng", và khi thế hệ trước dần dần rút ra, điều thú vị là quan sát một số thành viên của thế hệ sau đón nhận một cách tiếp cận dựa trên nhóm: không phải chọn ra hay pha trộn, mà thật ra là chấp nhận nhiều mô hình *như một mô hình* và sử dụng chúng trong sự hòa hợp. Thay vì chơi như những đối thủ trong một cuộc cạnh tranh, liệu nhà vật lý, nhà toán học, nhà thống kê và nhà triết học có thể làm việc như một đội ngũ?

Nghiên cứu về hỗn độn giúp chúng ta thấy rõ hơn những câu hỏi nào có ý nghĩa, những câu hỏi nào thật sự là vô nghĩa: nghiên cứu về động lực học hỗn độn đã buộc chúng ta chấp nhận rằng với những tính chất rắc rối của các hệ thống phi tuyến, một số mục tiêu là không thể đạt được. Và do những mô hình tốt nhất là phi tuyến - chẳng hạn mô hình cho thời tiết, nền kinh tế, bệnh dịch, não, mạch Moore-Spiegel, thậm chí hệ thống khí hậu của trái đất - nên hiểu biết này có những ý nghĩa vượt khỏi phạm vi khoa học, mở rộng đến việc ra quyết định và xây dựng chính sách. Một cách lý tưởng, những nhận thức sâu sắc về hỗn độn và động lực học phi tuyến sẽ giúp người tạo dựng mô hình khí hậu, để khi được hỏi một câu hỏi mà họ biết là vô nghĩa, họ sẽ có khả năng giải thích những giới hạn hiện thời đối với kiến thức của chúng ta và truyền đạt những thông tin đang có. Ngay cả nếu các tính chất không hoàn hảo của mô hình nói lên rằng không có dự báo xác suất phù hợp cho xây dựng chính sách, thì một hiểu biết tốt hơn về quá trình vật lý ẩn bên dưới cũng đã từ lâu hỗ trợ cho những người ra quyết định.

Mọi quyết định khó khăn được đưa ra với sự không chắc chắn. Hiểu biết về hỗn độn đã hỗ trợ chúng ta ra quyết định tốt hơn. Ngành năng lượng đã có những tiến bộ kinh tế đáng kể, bởi đó là nơi ích lợi của những dự báo thời tiết nhóm với thông tin phong phú bên trong dẫn tới ứng dụng hàng ngày của thông tin về tính không chắc chắn, từ những sàn giao dịch của các thị trường tới những phòng giám sát lưới điện quốc gia.

Đoán trước là khó. Chúng ta không bao giờ thấy rõ khoa học sẽ thu nhận ngữ cảnh nào tiếp theo, nhưng hỗn độn đã thay đổi các quy tắc của cuộc chơi, và đây rất có thể là tác động lâu dài nhất của nó lên khoa học. Thông điệp này cần được đưa vào sớm hơn trong chương trình giáo dục. Vai trò của tính không chắc chắn và sự đa dạng phong phú trong động thái mà các hệ thống đơn giản về toán học đã tiết lộ vẫn là điều phần lớn chưa được đánh giá cao. Tính không chắc chắn trong quan sát được hòa trộn không tách rời với sai số của mô hình, buộc chúng ta đánh giá lại thế nào là một mô hình tốt. Mục tiêu trước đây là tối thiểu hóa bình phương nhỏ nhất đã được chứng tỏ là không chính xác, nhưng chúng ta nên thay chúng bằng việc tìm kiếm bóng, bằng một mô hình với động thái có vẻ ổn, hay bằng năng lực đưa ra những dự báo xác suất khả quy trách nhiệm hơn? Từ điểm nhìn thuận lợi mới, có thể thấy rõ hơn những câu hỏi nào là có ý nghĩa, đưa ra những thách thức đối với các giả định căn bản của vật lý toán học và những ứng dụng của lý thuyết xác suất. Thất bại của chúng ta khi dựng mô hình có phải là do không có khả năng chọn câu trả lời đúng từ những lựa chọn đang có, hay là không có lựa chọn phù hợp nào được đưa ra? Làm thế nào chúng ta diễn giải những mô phỏng dựa trên các mô hình không đủ năng lực cho thực nghiệm? Bất kể niềm tin cá nhân của chúng ta về sự tồn tại của Sự thật là gì, hỗn độn đã buộc chúng ta suy nghĩ lại ý nghĩa của việc ước đoán Tự nhiên.

Nghiên cứu về hỗn độn đã cung cấp những công cụ mới: những tái tạo trễ có thể đưa đến các mô hình nhất quán kể cả khi chúng ta không biết "các phương trình cơ sở", những thống kê mới để mô tả các hệ thống động lực theo cách định lượng, những phương pháp mới để dự báo tính không chắc chắn, và những bóng để gắn kết khoảng cách giữa mô hình, quan sát và nhiễu. Nó đã chuyển trọng tâm từ sự tương quan sang thông tin, từ độ chính xác sang tính khả quy trách nhiệm, từ việc gượng gạo tối thiểu hóa sai số được cho là không liên quan đến việc tăng tích hữu dụng. Nó khơi lại cuộc tranh luận về địa vị của xác suất khách quan: liệu có khi nào chúng ta xây dựng được một dự báo xác suất hữu ích cho hoạt động, hay là buộc phải phát triển những phương pháp *tình thế* [ad hoc] mới để sử dụng thông tin mang tính xác suất mà không có những dự báo xác suất? Chúng ta đang lượng hóa tính không chắc chắn về tương lai của thế giới thực, hay đang khảo sát tính đa dạng trong các mô hình? Khoa học đi tìm sự thiếu năng lực của chính nó, nên việc đương đầu với tính không chắc chắn không lúc nào không có trong khoa học không phải là điểm yếu mà là một điểm mạnh. Hỗn độn đã cung cấp nhiều chất liệu mới để chúng ta nghiên cứu thế giới, nhưng không đưa ra bất kỳ mô hình hoàn hảo hay giải pháp tối hậu nào. Khoa học là một công việc chắp vá, và một số đường nối chấp nhận sự không kín kẽ.

Từ phần đầu của bộ phim *Ma trận* (*The Matrix*), Morpheus* đã gợi lại những lời của Eddington ở đầu mục này:

> Đây là cơ hội cuối của anh. Sau đây, anh không có đường trở lại nữa. Uống viên thuốc màu xanh, và câu chuyện kết thúc. Anh tỉnh dậy trên giường, tin vào mọi thứ mình muốn tin. Uống viên thuốc màu đỏ, anh ở lại Xứ sở thần tiên, và tôi cho anh thấy hang thỏ sâu chừng nào. Hãy nhớ, tất cả những gì tôi đang đề nghị với anh là: sự thật. Không có gì hơn.

Hỗn độn là viên thuốc màu đỏ.

---

* Morpheus: nhân vật trong phim *Ma trận* (The Matrix), một film khoa học giả tưởng năm 1999 do The Wachowskis đạo diễn.

Danh mục thuật ngữ

> Các nhà toán học giống như một kiểu người Pháp; khi bạn nói chuyện với họ, họ dịch chúng thành ngôn ngữ của họ, và nó nhanh chóng biến thành một thứ hoàn toàn khác.
>
> Goethe, *Cách ngôn và suy ngẫm* (1779)*

Những mục dưới đây không nhằm đưa ra định nghĩa chính xác, mà chỉ để chuyển tải ý tưởng chính để bạn tham khảo nhanh. Một số thuật ngữ có những sắc thái ý nghĩa khác nhau khi được sử dụng bởi nhà toán học (M), nhà vật lý học (P), nhà khoa học máy tính (C), hay nhà thống kê (S). Các định nghĩa và bàn luận có thể được tìm thấy trên diễn đàn của CATS (Trung tâm phân tích chuỗi thời gian - Centre for Analysis of Time Series) tại *www.lsecats.org* và trong những cuốn sách được liệt kê ở phần Tài liệu tham khảo.

---

* Johann Wolfgang von Goethe (1749 - 1832), thì hào Đức.

almost every (M): Hầu hết mọi. Một cụm từ toán học thường được sử dụng nhằm cảnh báo rằng dù thứ gì đó là đúng 100%, vẫn có những trường hợp sai.

almost every (P): Hầu hết mọi.

attractor: Điểm thu hút. Một điểm hoặc tập hợp các điểm trong *không gian biểu diễn*, sao cho một tập hợp các biểu diễn khác ngày càng tiến gần nó khi được lặp tới.

basin of attraction: Vùng thu hút. Đối với một *điểm thu hút* cụ thể, đây là tập hợp mọi biểu diễn cuối cùng sẽ tiến đến nó.

Burns effect: Hiệu ứng Burns. Một diễn đạt tóm lược sự khó khăn mà những dự báo không hoàn thiện và những mô hình không hoàn hảo gây ra cho những nỗ lực ra quyết định hợp lý.

butterfly effect: Hiệu ứng cánh bướm. Một diễn đạt tóm lược ý tưởng rằng những khác biệt nhỏ trong hiện tại có thể dẫn tới những khác biệt lớn trong tương lai.

chaos (C): Hỗn độn. Một chương trình máy tính muốn biểu diễn một hệ thống toán học hỗn độn. Trong thực hành, mọi hệ thống động lực kỹ thuật số được máy tính hóa đều đang trong một vòng lặp tuần hoàn, hoặc đang diễn tiến về phía một vòng lặp tuần hoàn.

chaos (M): Hỗn độn. Một hệ thống toán học (a) có tính tất định, (b) tái lặp, và (c) có sự phụ thuộc nhạy vào biểu diễn ban đầu.

chaos (P): Một hệ thống vật lý mà hiện thời chúng ta tin rằng có thể được tạo dựng mô hình tốt nhất bằng một hệ toán học hỗn độn.

chaotic attractor: Điểm thu hút hỗn độn. Một điểm thu hút tại đó động lực là hỗn độn. Một điểm thu hút hỗn độn có thể có hình học *fractal* hoặc không, vì vậy có những điểm thu hút hỗn độn *lạ*, và những điểm thu hút hỗn độn không lạ.

conservative dynamical systems: Hệ thống động lực bảo tồn. Một hệ thống động lực trong đó một thể tích của *không gian biểu diễn* không co lại khi được lặp tới. Những hệ thống này không thể có *điểm thu hút*.

delay reconstruction: Tái tạo trễ. Một *không gian biểu diễn của mô hình*, được tạo dựng bằng cách lấy các giá trị thời gian trễ của cùng biến số thay vì những quan sát của các biến số biểu diễn bổ sung.

dissipative dynamical system: Hệ thống động lực tán xạ. Một hệ thống động lực mà xét trung bình, một thể tích của *không gian biểu diễn* co lại khi được lặp tới dưới hệ thống đó. Thể tích có xu hướng tiến về zero, nhưng nó không nhất thiết co về một điểm mà có thể tiến tới một *điểm thu hút* khá phức tạp.

doubling time: Thời gian nhân đôi. Thời gian để một mức không chắc chắn ban đầu tăng lên theo hệ số hai. Thời gian nhân đôi trung bình là một thước đo về tính chất có thể dự báo.

effectively exponential growth: Sự tăng hữu hiệu theo số mũ. Sự tăng về thời gian mà nếu tính trung bình vào tương lai vô hạn thì có vẻ là bình quân theo số mũ, nhưng có thể tăng khá chậm hoặc thậm chí co lại trong những khoảng thời gian dài.

ensemble forecast: Dự báo nhóm, rổ dự báo. Một dự báo dựa trên việc lặp tới một số biểu diễn ban đầu khác nhau (có khi với những giá trị tham số khác nhau hoặc thậm chí mô hình khác nhau), qua đó tiết lộ tính đa dạng trong động thái của (các) mô hình, cung cấp một giới hạn thấp hơn cho những tác động có thể xảy ra của tính không chắc chắn lên những dự báo dựa trên mô hình.

exponential growth: Sự tăng theo số mũ. Tốc độ tăng của X tỉ lệ với giá trị của X, nên khi X càng lớn thì nó tăng càng nhanh.

fixed point: Điểm cố định. Một biểu diễn ở yên của một hệ thống động lực. Một điểm tĩnh, với giá trị tương lai chính là giá trị hiện tại dưới hệ thống đó.

flow: Luồng. Một hệ thống động lực trong đó thời gian là liên tục.

fractal: Một tập hợp các điểm tự đồng dạng hoặc một đối tượng tự đồng dạng theo cách thú vị (chẳng hạn, thú vị hơn một đường trơn hoặc mặt phẳng trơn). Thông thường, một tập hợp fractal phải có thể tích bằng không trong không gian mà nó tồn tại, chẳng hạn một đường trong không gian hai chiều thì không có diện tích, hoặc một mặt phẳng trong không gian ba chiều thì không có thể tích.

geometric averaga: Bình quân hình học. Nhân N con số với nhau sau đó lấy căn bậc N của kết quả thu được.

indistinguishable state: Biểu diễn không thể phân biệt. Một thành viên của tập hợp điểm mà với một mô hình *nhiễu* quan sát nhất định, bạn sẽ không có khả năng phân biệt nó là điểm đã tạo ra những quan sát thực tế được sinh ra bởi một quỹ đạo mục tiêu X nào đó. Tập hợp này dược hỏi là tập hợp những biểu diễn không thể phân biệt của X, và không liên quan gì đến bất kỳ tập hợp quan sát nào.

infinitesimal: Vô cực nhỏ. Một số lượng nhỏ hơn bất cứ con số nào bạn có thể gọi tên, nhưng chặt chẽ mà nói vẫn lớn hơn không.

iterate: Lặp. Áp dụng một lần quy tắc định nghĩa một *ánh xạ* động lực, chuyển biểu diễn đi tới một bước.

linear dynamical system: Hệ thống động lực tuyến tính. Một hệ thống động lực trong đó tổng của các giải pháp cũng là giải pháp, hay nói chung, một hệ thống cho phép sự chồng giải pháp. (Vì những lý do kỹ thuật, chúng ta không muốn nói "là một hệ thống chỉ bao gồm những quy tắc tuyến tính").

Lyapunov exponent: Lũy thừa Lyapunov. Một phép đo về tốc độ trung bình, mà với những tốc độ ấy những biểu diễn *cực* gần nhau vẫn tách rời. Nó được gọi là một lũy thừa vì là logarithm của tốc độ trung bình, nên dễ phân biệt sự tăng bình quân theo lũy thừa (lớn hơn zero) với sự giảm bình quân theo lũy thừa (số âm). Lưu ý rằng sự tăng chậm hơn lũy thừa, sự giảm chậm hơn lũy thừa và tình trạng không tăng đều được kết hợp vào một giá trị (zero).

Lyapunov time: Thời gian Lyapunov. Lấy 1 chia *lũy thừa Lyapunov*, con số này không liên quan đến tính chất có thể dự đoán của bất cứ thứ gì trừ trường hợp trong những hệ thống hỗn độn đơn giản hóa nhất.

map: Ánh xạ. Một quy tắc xác định một biểu diễn mới từ một biểu diễn hiện thời. Trong kiểu hệ thống động lực toán học này, thời gian chỉ lấy những giá trị rời rạc (số nguyên), nên chuỗi giá trị của X được ký hiệu là X_i, trong đó i thường được gọi là "lần thứ".

model: Mô hình. Một hệ thống động lực toán học thú vị do động lực của chính nó hoặc do động lực ấy gợi nhớ những động lực của một hệ thống vật lý.

noise (đo lường): Nhiễu. Tính không chắc chắn trong quan sát, ý tưởng rằng có một giá trị "Đúng" mà chúng ta đang cố gắng đo lường, và những nỗ lực lặp đi lặp lại cung cấp các con số gần với nó nhưng không chính xác là nó. Nhiễu được chúng ta xem là nguyên nhân của độ thiếu chính xác trong các đo lường.

noise (động lực): Nhiễu. Bất cứ thứ gì can thiệp vào hệ thống, thay đổi biểu hiện tương lai của nó khác với động thái của phần tất định trong mô hình.

noise model: Mô hình nhiễu. Một mô hình toán học về nhiễu, được sử dụng nhằm giải thích bất cứ thứ gì được xem là nhiễu thực.

non-constructive proof: chứng minh không kiến tạo. Một chứng minh toán học, xác lập rằng một thứ gì đó tồn tại nhưng không nói cho chúng ta phải tìm nó như thế nào.

nonlinear: Phi tuyến, tất cả những gì không phải là tuyến tính.

observational uncertainty: Tính không chắc chắn trong quan sát. Sai số đo lường, những điều không chắc chắn do độ thiếu chính xác của bất kỳ quan sát nào về trạng thái của hệ thống.

pandemonium: Xứ quỷ. *Động lực nhất thời*, biểu lộ những đặc điểm gợi ra hỗn độn, nhưng chỉ trên một khoảng thời gian hữu hạn (do vậy không tái lặp).

parameters: tham số. Những con số trong mô hình, đại diện cho và định nghĩa những đặc điểm của hệ thống được dựng mô hình; những tham số thường được giữ cố định trong khi biểu diễn của mô hình diễn tiến.

Perfect Model Scenario (PMS): Kịch bản mô hình hoàn hảo. Một trò ảo thuật toán học hữu dụng, trong đó chúng ta sử dụng mô hình đang có để tạo ra dữ liệu, rồi giả vờ quên rằng đã làm như vậy, và phân tích "dữ liệu", sử dụng mô hình và các công cụ. Nói chung, đây là bất kỳ tình huống nào, trong đó chúng ta có một mô hình hoàn hảo cho cấu trúc toán học của hệ thống đang nghiên cứu.

periodic loop: Vòng lặp tuần hoàn. Một chuỗi các biểu diễn trong một hệ thống tất định tự khép kín vào chính nó: biểu diễn đầu tiên nối vào biểu diễn cuối cùng, và lặp đi lặp lại mãi. Một quỹ đạo tuần hoàn hoặc một chu kỳ giới hạn.

Poincaré section: Mặt cắt Poincaré. Mặt cắt của một *luồng*, ghi lại giá trị của mọi biến số khi một biến số tình cờ nhận một giá trị cụ thể. Được Poincaré phát triển để cho phép biến một luồng thành một *ánh xạ*.

predictability (M): Tính có thể dự đoán. Một tính chất cho phép tạo lập một phân bố dự báo hữu ích, khác với việc rút ngẫu nhiên từ phân bố (khí hậu học) cuối cùng. Đối với những hệ thống có điểm thu hút, điều này có nghĩa là một dự báo tốt hơn việc lựa ra các điểm một cách mò mẫm từ điểm thu hút.

predictability (P): Tính có thể dự đoán. Một tính chất cho phép thông tin hiện thời đưa đến thông tin hữu ích về trạng thái tương lai của một hệ thống.

prediction: Dự báo. Một phát biểu về trạng thái tương lai của một hệ thống.

probabilistic: Mang tính xác suất. Mọi thứ không rõ ràng, những phát biểu có thừa nhận sự không chắc chắn.

random dynamics: Động lực ngẫu nhiên. Những động lực mà trạng thái tương lai không được quyết định bởi trạng thái hiện thời. Cũng gọi là động lực phân bố ngẫu nhiên.

recurrent trajectory: Quỹ đạo tái lặp. Một quỹ đạo cuối cùng sẽ trở lại rất gần với trạng thái hiện thời của nó.

sample-statistics (S): Thống kê mẫu. Một thống kê (chẳng hạn: trung bình, phương sai, *thời gian nhân đôi* trung bình, hoặc *lũy thừa Lyapunov* lớn nhất) được ước tính từ một mẫu dữ liệu. Cụm từ được sử dụng để tránh lẫn lộn với giá trị đúng của thống kê.

sensitive dependence (P): Phụ thuộc nhạy. Sự phân tách nhanh chóng theo thời gian, ở tốc độ bình-quân-theo-số-mũ của những trạng thái gần nhau.

shadowing (M): Che bóng. Một mối quan hệ giữa hai mô hình được biết rõ, với động lực hơi khác nhau, sao cho có thể chứng minh rằng một trong các mô hình sẽ có một quỹ đạo nào đó ở gần một quỹ đạo cho trước của mô hình kia.

shadowing (P): Che bóng. Một hệ thống động lực được gọi là "che bóng" một tập hợp các quan sát nếu như với một *nhiễu* quan sát kỳ vọng cho sẵn, nó có khả năng tạo ra một quỹ đạo hoàn toàn được xem là có thể sinh ra những quan sát ấy. Một bóng là một quỹ đạo nhất quán cả với mô hình nhiễu và những quan sát.

state: Biểu diễn. Một điểm trong *không gian biểu diễn*, hoàn toàn xác định điều kiện hiện thời của hệ thống ấy.

state space: Không gian biểu diễn. Không gian trong đó mỗi điểm hoàn toàn xác định trạng thái hay điều kiện của một hệ thống động lực.

stochastic dynamics: Động lực ngẫu nhiên. Xem *random dynamics*.

strange attractor: Điểm thu hút lạ. Một *điểm thu hút* với cấu trúc *fractal*. Một điểm thu hút lạ có thể là hỗn độn hoặc phi hỗn độn.

time series (M, P, S): Chuỗi thời gian. Một chuỗi các quan sát được lấy để đại diện cho sự diễn tiến của một hệ thống qua thời gian. Vị trí của các hành tinh, số lượng vết đen mặt trời, hay tổng số lượng chuột là những ví dụ về chuỗi thời gian. Đầu ra của một mô hình toán học, hoặc trong thống kê, chuỗi thời gian cũng chính là mô hình.

transient dynamics: Động lực nhất thời. Biểu hiện nhất thời, giống như trong một trò chơi roulette, hoặc một quả bóng trong Bảng Galton hay Bảng NAG, vì cuối cùng quả bóng sẽ dừng lại. Xem *pandemonium*.

Tài liệu tham khảo

Dành cho trẻ em

Michael Coleman và Gwyneth Wiliamson, *Một, hai, ba, Chà!* (*One, Two, Three, Oops!*, London: Little Tiger Press, 1999)

Hư cấu

Ray Bradbury, "Một âm thanh như tiếng sấm" (A Sound Like a Thunder, *Collier's Magazine*, 28 tháng 6 năm 1952)

Carol Shields, *Trừ phi* (*Unless*, Toronto: Random House Canada, 2002)

Lịch sử khoa học và khoa học lịch sử

Thomas Bass, *Sòng bạc kiểu Newton* (*The Newtonian Casino*, Harmondsworth: Penguin, 1991)

Leon Brillouin, *Tính không chắc chắn khoa học và thông tin* (*Scientific Uncertainty and Information*, New York: Academic Press, 1964)

John L. Casti, *Đi tìm sự chắc chắn* (*Searching for Certainty*, New York: William Morrow, 1991)

Arthur Eddington, *Bản chất của thế giới vật lý* (*The Nature of the Physical World*, Cambridge: Cambridge University Press, Gifford Lectures Series, 1928)

E. E. Fournier d'Albe, *Hai thế giới mới* (*Two New Worlds*, London: Longmans Green, 1907)

Francis Galton, *Sự thừa hưởng tự nhiên* (*Natural Inheritance*, London: Macmillan, 1889)

Stephen M. Stigler (2002), *Thống kê trên bàn: Lịch sử các khái niệm và phương pháp thống kê* (*Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods*, Cambridge, Mass: Harvard University Press, 2002)

H. S. Thayer, *Triết lý của Newton về tự nhiên* (*Newton's Philosophy of Nature*, New York: Hafner, 1953)

Triết học khoa học

R. C. Bishop, *Dẫn nhập vào triết lý của khoa học xã hội* (*Introduction to the Philosophy of Social Science*, London: Continuum)

N. Cartwright, *Các quy luật của vật lý nói dối như thế nào* (*How the Laws of Physics Lie*, Oxford: Oxford University Press, 1983)

John Earman, *Nhập môn tất định luận* (*A Primer on Determinism*, Dordrecht: Reidel, 1986)

Jennifer Hecht, *Nghi ngờ: Một lịch sử* (*Doubt: A History*, San Francisco: Harper, 2003)

P. Smith, *Giải thích về hỗn độn* (*Explaining Chaos*, Cambridge: Cambridge University Press, 1998)

Hỗn độn

L. Glass và M. Mackey, *Từ đồng hồ đến hỗn độn* (*From Clocks to Chaos*, Princeton: Princeton University Press, 1988)

Ed Lorenz, *Bản chất của hỗn độn* (*The Essence of Chaos*, London: UCL Press, 1993)

J. C. Sprott, *Hỗn độn và phân tích chuỗi thời gian* (*Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford: Oxford University Press, 2003)

I. Steward, *Thượng đế có chơi xúc xắc không?* (*Does God Play Dice?*, Harmondsworth: Penguin, 1997)

Thời tiết

T. Palmer và R. Hagedorn, *Tính có thể dự đoán* (*Predictability*, Cambridge: Cambridge University Press, 2006)

Những thảo luận chi tiết hơn

Edward Ott, *Hỗn độn trong những hệ thống động lực* (*Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002)

G. Gouesbet, S. Meunier-Guttin-Cluzel, và O. Menard (đồng biên soạn), *Hỗn độn và sự tái tạo của nó* (*Chaos and Its Reconstruction*, NOVA, 2003). (Cụ thể, xem chương 9 của Keven Judd, điểm qua mười năm làm việc tại CADO về tạo dựng mô hình các hệ thống động lực từ chuỗi thời gian).

H. Kantz và T. Schreiber, *Phân tích chuỗi thời gian phi tuyến* (*Nonlinear Time Series Analysis*, ấn bản lần thứ hai, Cambridge: Cambridge University Press, 2003)

Nhiều nội dung về Bakers và phương trình Bakers có thể được tìm thấy trong H. Tong (biên soạn), "Hỗn độn và dự báo" (Chaos and Forecasting), *World Scientific Publications* (Singapore, 1995)

Dự báo nhóm đầy đủ gồm 51 thành phần cùng một số minh họa màu trong *Dẫn luận* này có thể được tìm thấy trong L. A. Smith (2002), "Tính có thể dự báo và sự hỗn độn" (Predictability and Chaos), trong *Bách khoa toàn thư các khoa học về khí quyển* (*Encyclopedia of Atmospheric Sciences*), J. Holton, J. Pyle và J. Curry biên soạn (New York: Academic Press, 2002), tr. 1777-85.

DẪN LUẬN VỀ THUYẾT HỖN ĐỘN

Leonard Smith

NHÀ XUẤT BẢN HỒNG ĐỨC
65 Tràng Thi, Quận Hoàn Kiếm, Hà Nội
ĐT : 39.260.031

Chịu trách nhiệm xuất bản	: Giám đốc - BÙI VIỆT BẮC
Chịu trách nhiệm nội dung	: Tổng biên tập - LÝ BÁ TOÀN
Biên tập	: Nguyễn Khắc Oánh
Biên tập Văn Lang	: Phan Đan
Trình bày	: Đông Phương
Vẽ bìa	: Hs. Quốc Ân
Sửa bản in	: Kim Đính

CÔNG TY CP VĂN HÓA VĂN LANG - NS. VĂN LANG
40 - 42 Nguyễn Thị Minh Khai, Q.1, TP.HCM
ĐT : 38.242157 - 38.233022 - Fax : 38.235079

In 1.000 cuốn khổ 12x20 cm tại Xưởng in Cty CP Văn hóa Văn Lang
06 Nguyễn Trung Trực, P.5, Q.Bình Thạnh, Tp.HCM.
Xác nhận ĐKXB số : 4147-2015/CXBIPH/11-107/HĐ.
QĐXB số : 2795/QĐ - NXBHĐ, ngày 31/12/2015.
ISBN : 978-604-86-8164-7.
In xong và nộp lưu chiểu quý 1 năm 2016.